

# THESE

présentée

à la Faculté des Sciences de l'Université de Nantes

pour obtenir

le GRADE de DOCTEUR ès-SCIENCES

par

**Jacques VILAINÉ**



ETUDE DES VIBRATIONS FORCEES DE SYSTEMES CONSTITUES DE MASSES ET RESSORTS  
EN SERIE, SANS AMORTISSEMENT, DONT DEUX DES MASSES ENTRENT EN COLLISION  
LORS DU MOUVEMENT

Soutenue le 12 juillet 1969 devant la Commission d'Examen

Monsieur PIRONNEAU Président

Monsieur TARDY

Monsieur LAMEAU

Monsieur BOUCHET

} Examinateurs



# THESE

présentée

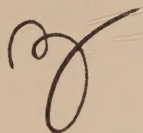
à la Faculté des Sciences de l'Université de Nantes

pour obtenir

le GRADE de DOCTEUR ès-SCIENCES

par

**Jacques VILAINE**



ETUDE DES VIBRATIONS FORCEES DE SYSTEMES CONSTITUES DE MASSES ET RESSORTS  
EN SERIE, SANS AMORTISSEMENT, DONT DEUX DES MASSES ENTRENT EN COLLISION  
LORS DU MOUVEMENT

*Soutenue le 12 juillet 1969 devant la Commission d'Examen*

Monsieur PIRONNEAU    Président

Monsieur TARDY

Monsieur LAMEAU

Monsieur BOUCHET

} Examinateurs



# UNIVERSITE DE NANTES

## FACULTE DES SCIENCES

---

|                                |                         |                          |
|--------------------------------|-------------------------|--------------------------|
| <b>Doyen</b>                   | M. DUNOYER de SEGONZAC  | Chimie                   |
| <b>Assesseur</b>               | M. SELLIER              | Zoologie                 |
| <b>Professeurs</b>             | M. PAUC                 | Mathématiques            |
|                                | M. RAVILLY (E.N.S.M.)   | Mécanique                |
|                                | M. RAFFIN               | Mécanique rationnelle    |
|                                | M. GARRIGUES            | Biologie végétale        |
|                                | M. BRILLOUET            | Analyse numérique        |
|                                | M. GRAFF                | Chimie                   |
|                                | M. VIVIER (E.N.S.M.)    | Mathématiques appliquées |
|                                | M. COLLET               | Physique                 |
|                                | M. BOULLLOUD (C.S.U.)   | Physique                 |
|                                | Melle DEBRAUX           | Botanique                |
|                                | M. PETRESCO             | Mathématiques            |
|                                | M. PIERI                | Biologie animale         |
|                                | M. WOJTKOWIAK           | Chimie                   |
|                                | M. AVIGNON              | Physique                 |
|                                | M. MINN                 | Physique                 |
|                                | M. MOUTON               | Physique                 |
|                                | M. TARDY (E.N.S.M.)     | Mécanique                |
| <b>Professeurs sans chaire</b> | M. GOBIN (E.N.S.M.)     | Chimie                   |
|                                | M. CAVET                | Sciences de la Terre     |
|                                | M. OTTMANN              | Sciences de la Terre     |
|                                | M. MEZENECV (E.N.S.M.)  | Physique                 |
|                                | M. MOLINARO             | Mathématiques            |
|                                | M. DUPONT               | Biologie végétale        |
|                                | M. ROUXEL               | Chimie                   |
|                                | M. QUINIOU              | Chimie                   |
|                                | Melle OFFRET (E.N.S.M.) | Physique                 |
|                                | M. LASKAR               | Physique                 |
|                                | M. GOUREAUX             | Physique                 |

**Maîtres de Conférences**

M. FORESTIER

M. SAUDRAY

M. MARTIN

M. LE DOUARIN Georges

M. AMOURIQ

Melle ASTIE (C.S.U.)

M. LAMEAU (E.N.S.M.)

Mme LE DOUARIN Nicole

M. TOURNOUX

M. GUEVEL (E.N.S.M.)

M. GOUIN (C.S.U.)

M. POINTEAU (E.N.S.M.)

M. SULMONT (E.N.S.M.)

M. BARDON

M. LONCKE

M. LEBRUN

M. JONARD

M. IBISCH

Maître de Conférences associé

M. FOUQUES

M. ROSIER

M. LEBORGNE

Melle LEYCURAS

M. REMY (C.S.U.)

M. LE BIHAN

M. MATZ (C.S.U.)

**Sciences de la Terre****Biologie animale****Chimie****Biologie végétale****Psychophysiologie****Botanique****Mathématiques****Biologie végétale****Chimie minérale****Mathématiques****Chimie****Chimie****Mathématiques****Physique****Physique****Biologie animale****Biologie végétale****Mathématiques****Physique****Mathématiques****Physique****Chimie****Physique****Biologie****Secrétaire de la Faculté**

M. PAILLET

**Attaché Principal**

A la mémoire de mon père

A ma mère

A ma femme

A ma famille



## SOMMAIRE

### - INTRODUCTION

### - PREMIERE PARTIE

Etude théorique du système à  $n^*$  degrés de liberté.

#### - Préliminaire

Généralités sur le système à 1 degré de liberté avec déplacement limité d'un seul côté, monté sur butée fixe et soumis à l'action d'une excitation complexe résultant de la superposition d'excitations périodiques.

#### - Chapitre 1

Etude théorique du système à  $n^*$  degrés de liberté :

1 - Préliminaire

2 - Hypothèses

3 - Equations linéaires

4 - Conditions initiales

5 - Périodicité

6 - Résolution

6,1 - Préliminaire

6,2 - Autres équations

6,3 - Résolution

6,4 - Conditions d'existence des percussions régulières

6,5 - Cas particuliers

6,6 - Remarque

#### - Chapitre 2

Application de la théorie générale à certains cas particuliers.:

1 - Préliminaire

2 - Système à  $n^*$  degrés de liberté avec  $n$  excitations de même pulsation.

3 - Système à  $n = n^*$  degrés de liberté (butée fixe)  $n$  excitations quelconques.

4 - Système à  $n = n^*$  degrés de liberté (butée fixe)  $n$  excitations de même pulsation.

5 - Système à  $n \neq n^*$  - excitations différentes

6 - Système à  $n = n^*$  - excitations de même pulsation

7 - Système à  $n \neq n^*$  -  $\Omega_1 \neq 0$   $\Omega_2 \neq 0$

8 - Système à  $n = 1$ ,  $n^* = 2$

9 - Système à  $n = n^*$  -  $n = 1$

### - Chapitre 3

Stabilité des percussions pour les systèmes à 1 et 2 degrés de liberté sur butée fixe :

- 1 - Généralités sur la stabilité du système à  $n^*$  degrés de liberté
- 2 - Stabilité du système à 2 degrés de liberté sur butée fixe et une seule excitation placée sur la masse non percutante ( $n = n^* = 2$ )
- 3 - Stabilité du système à 1 degré sur butée fixe ( $n = n^* = 1$ )
- 4 - Validité de la théorie sur la stabilité.

### -- Chapitre 4

Plages de percussions régulières réelles pour un système donné.

### - DEUXIEME PARTIE -

Analyse des graphes de  $x'(\tau^-) = f(r_{k,\ell})$  pour  $n = n^* = 1$ ,  $n = n^* = 2$   
Application aux vibropercuteurs à 1 et 2 degrés de liberté.

#### - Préliminaire

#### - Chapitre 1

Système à 1 degré de liberté sur butée fixe, excité par balourds :

- 1 - Introduction
- 2 - Position du problème
- 3 - Résultats.

#### 3,1 - L'interstice est positif ou nul

##### 3,1,1 - Préliminaire

###### 3,1,1,1 - Courbe de résonance

###### 3,1,1,2 - Influence de $R, N$ et $\frac{x(0)}{D}$ sur la plage de percussions automatiques.

###### 3,1,1,3 - Conditions pour qu'il puisse exister deux valeurs de la vitesse de percussion pour un même $r$ .

###### 3,1,1,4 - Différents types de plages de percussions.

##### 3,1,2 - Influence de $\frac{x(0)}{D}$

###### 3,1,2,1 - Généralités

###### 3,1,2,2 - Graphes

###### 3,1,2,3 - Lois générales

##### 3,1,3 - Influence de $R$

###### 3,1,3,1 - Généralités

###### 3,1,3,2 - Graphes

###### 3,1,3,3 - Lois générales

- 3,1,4 - Influence de N
  - 3,1,4,1 - Généralités
  - 3,1,4,2 - Graphes
  - 3,1,4,3 - Lois générales

## 3,2 - L'interstice est négatif

- 3,2,1 - Préliminaire
  - 3,2,1,1 - Plage de percussions automatiques
  - 3,2,1,2 - Conditions pour qu'il puisse exister des plages à double valeur de la vitesse de percussion
  - 3,2,1,3 - Différents types de plages de percussions.
- 3,2,2 - Influence de  $\frac{x(o)}{D}$ 
  - 3,2,2,1 - Généralités
  - 3,2,2,2 - Graphes
  - 3,2,2,3 - Lois générales
- 3,2,3 - Influence de R
  - 3,2,3,1 - Graphes
  - 3,2,3,2 - Lois générales
- 3,2,4 - Influence de N
  - 3,2,4,1 - Généralités
  - 3,2,4,2 - Graphes
  - 3,2,4,3 - Lois générales

## 4 - Conclusion.

## - Chapitre 2

Système à 2 degrés de liberté sur butée fixe, excité par balourds :

- 1 - Introduction
- 2 - Position du problème
- 3 - Résultats

### 3,1 - L'interstice est positif ou nul.

- 3,1,1 - Préliminaires
  - 3,1,1,1 - Courbe de résonance
  - 3,1,1,2 - Influence de  $R, N, \frac{x(o)}{D}, \alpha, \beta$  sur les plages de percussions automatiques.
  - 3,1,1,3 - Conditions pour qu'il puisse exister deux valeurs de la vitesse de percussion pour un même  $r_1$

- 3,1,2 - Influence de  $\frac{x(o)}{D}$ 
  - 3,1,2,1 - Généralités
  - 3,1,2,2 - Graphes
  - 3,1,2,3 - Lois générales
- 3,1,3 - Influence de R.
  - 3,1,3,1 - Généralités
  - 3,1,3,2 - Graphes
  - 3,1,3,3 - Lois générales
- 3,1,4 - Influence de  $\alpha$ 
  - 3,1,4,1 - Généralités
  - 3,1,4,2 - Graphes
  - 3,1,4,3 - Lois générales
- 3,1,5 - Influence de  $\beta$ 
  - 3,1,5,1 - Généralités
  - 3,1,5,2 - Graphes
  - 3,1,5,3 - Lois générales
- 3,1,6 - Influence de N
  - 3,1,6,1 - Généralités
  - 3,1,6,2 - Graphes
  - 3,1,6,3 - Lois générales
- 3,1,7 - Remarques.
- 3,2 - L'interstice est négatif.
  - 3,2,1 - Préliminaire
    - 3,2,1,1, - Plages de percussions automatiques
    - 3,2,1,2 - Conditions pour qu'il existe deux valeurs de la vitesse de percussion pour une même valeur de  $r_1$
  - 3,2,2 - Influence de  $\frac{x(o)}{D}$ 
    - 3,2,2,1 - Généralités
    - 3,2,2,2 - Graphes
    - 3,2,2,3 - Lois générales
  - 3,2,3 - Influence de R
    - 3,2,3,1 - Généralités
    - 3,2,3,2 - Graphes
    - 3,2,3,3 - Lois générales

- 3,2,4 - Influence de  $\alpha$ 
  - 3,2,4,1 - Généralités
  - 3,2,4,2 - Graphes
  - 3,2,4,3 - Lois générales
- 3,2,5 - Influence de  $\beta$ 
  - 3,2,5,1 - Généralités
  - 3,2,5,2 - Graphes
  - 3,2,5,3 - Lois générales
- 3,2,6 - Influence de N
  - 3,2,6,1 - Généralités
  - 3,2,6,2 - Graphes
  - 3,2,6,3 - Lois générales

4 - Conclusion.

- Chapitre 3

Influence de la stabilité sur les percussions régulières des systèmes à 1 et 2 degrés de liberté sur butées fixes, et excités par balourds.

- Chapitre 4

Application des résultats théoriques à la détermination des caractéristiques mécaniques des vibropercuteurs à 1 et 2 degrés de liberté, montés sur butée fixe.

- 1 - Préliminaire
- 2 - Calcul de la vitesse de percussion
- 3 - Réglage de l'interstice réel pour obtenir la vitesse de percussion maximum.
- 4 - Influence de la valeur des balourds sur les plages de percussions optimales.
- 5 - Vibropercuteur à 1 degré de liberté
- 6 - Vibropercuteur à 2 degrés de liberté
  - 6,1 - Préliminaire
  - 6,2 - Détermination de la valeur des balourds et réglage optimum de l'interstice.

- TROISIEME PARTIE -

Vérification expérimentale de  $n = n^* = 1$ ,  $n = n^* = 2$  - excitation unique sur la masse non percutante -, excitations de type balourds.

## 1 - Système mécanique utilisé

- 1,1 - Schéma de principe
- 1,2 - Photographies d'ensemble
- 1,3 - Détails techniques

## 2 - Principes des mesures

- 2,1 - Mesure de la période d'excitation
- 2,2 - Mesure des vitesses
- 2,3 - Déplacement du percuteur
- 2,4 - Mesure de l'interstice
- 2,5 - Mesure du nombre N de cycles décrits par l'excitation entre deux percussions consécutives.

## 3 - Chaîne électronique de mesures

- 3,1 - Filtres
- 3,2 - Chaîne électronique de mesures

## 4 - Mesures préliminaires

- 4,1 - Raideurs des ressorts
- 4,2 - Masses en mouvement
- 4,3 - Pulsations propres
- 4,4 - Valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  (*cas du 2° de liberté*)
- 4,5 - Valeurs de D
- 4,6 - Valeur du coefficient de restitution de vitesse R

## 5 - Vérifications des hypothèses

- 5,1 - Le système vibrant n'est pas amorti
- 5,2 - Les ressorts sont parfaitement linéaires et de masses négligeables.
- 5,3 - Les percussions sont instantanées
- 5,4 - Les déplacements des masses sont continus
- 5,5 - Les vitesses des masses sont continues à l'exception de celle du percuteur.

## 6 - Résultats expérimentaux

- 6,1 - Présentation des résultats
- 6,2 - Système à 1 degré de liberté
  - 6,2,1 - Graphes
  - 6,2,2 - Photographies de la vitesse de percussion pour divers N.
  - 6,2,3 - Cycles limites
- 6,3 - Système à 2 degrés de liberté
  - 6,3,1 - Graphes

6,3,2 - Photographies de la vitesse de percussion pour divers N.

6,3,3 - Photographie de la vitesse de l'excitateur.

6,3,4 - Cycles limites.

7 - Analyse des résultats expérimentaux - Conclusion.

- CONCLUSION -

- PERSPECTIVES -

- ANNEXE -

- BIBLIOGRAPHIE -



PRINCIPALES NOTATIONS UTILISEES

|                         |   |                                                                               |
|-------------------------|---|-------------------------------------------------------------------------------|
| $t$                     | : | temps                                                                         |
| $x$                     | : | déplacement                                                                   |
| $x'$                    | : | vitesse                                                                       |
| $x''$                   | : | accélération                                                                  |
| $k$                     | : | raideur de ressort                                                            |
| $m$                     | : | masse                                                                         |
| $x(o)$                  | : | interstice réel                                                               |
| $x'(\tau^-)$            | : | vitesse de percussion                                                         |
| $R$                     | : | coefficient de restitution de vitesse                                         |
| $\omega$                | : | pulsation propre                                                              |
| $\Omega$                | : | pulsation d'excitation                                                        |
| $r$                     | : | rapport de pulsation propre et d'excitation                                   |
| $\phi$                  | : | déphasage d'excitation par rapport à l'origine des temps                      |
| $\psi$                  | : | déphasage de terme d'oscillations libres par rapport à l'origine des temps    |
| $A$                     | : | constante d'intégration                                                       |
| $N$                     | : | nombre de cycles décrits par l'excitation entre deux percussions consécutives |
| $M$                     | : | matrice des masses                                                            |
| $K$                     | : | " des raideurs                                                                |
| $F$                     | : | " des forces d'excitations                                                    |
| $X$                     | : | " des déplacements                                                            |
| $E$                     | : | amplitude des forces d'excitations                                            |
| $i, j$                  | : | indices d'identification                                                      |
| $\alpha, \beta, \gamma$ | : | coefficients sans dimension                                                   |



## INTRODUCTION

Les vibrations des systèmes mécaniques constitués par des masses et ressorts en série ont fait l'objet de nombreuses recherches :

- Les systèmes linéaires, amortis ou non, en oscillations libres ou forcées, sont bien connus ; leurs études sont aisées en raisonnant sur les équations matricielles du mouvement et en appliquant les principes de diagonalisation des matrices.

- Les systèmes non linéaires sont, par contre, beaucoup plus complexes à analyser.

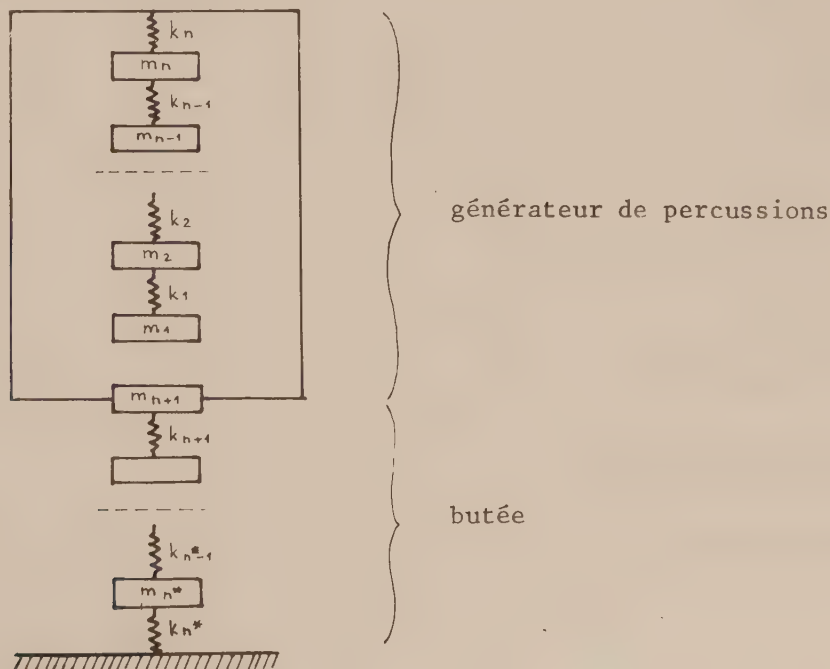
Pour notre part, nous nous proposons d'étudier les systèmes où la non linéarité provient de la collision de deux masses lors du mouvement.

A notre connaissance les recherches effectuées sur ce sujet sont réduites et limitées aux systèmes à 1 et 2 degrés de liberté. Nous retiendrons particulièrement les travaux de synthèse de D.D. BARKAN (*expression des vitesses de percussion pour les systèmes à 1 et 2 degrés de liberté*) et de J.A. SPARENBERG (*stabilité du système à 1 degré de liberté pour des collisions parfaitement élastiques*).

Le type de systèmes mécaniques retenu se compose :

- d'un sous-ensemble "générateur de percussions" comprenant  $n$  masses et ressorts en série. Chaque masse est susceptible de recevoir une excitation de type sinusoïdale ;

- d'un sous-ensemble "butée", constitué de  $(n^* - n)$  masses et ressorts en série, reposant sur un appui fixe.



Les deux sous-ensembles sont liés par une carcasse infiniment rigide.

Pour certaines valeurs des paramètres du système (*raideurs des ressorts, masses, excitations*), les masses  $m_1$  et  $m_{n+1}$  entrent en collision.

La vitesse de percussion (*vitesse relative des masses  $m_1$  et  $m_{n+1}$  immédiatement avant percussion*) est l'une des caractéristiques essentielles du système : son expression en fonction des divers paramètres permettra d'en déduire ses lois de variation et sa valeur optimale.

Nous nous limiterons aux mouvements périodiques, de période  $\tau$ ,  $\tau$  étant le temps entre deux percussions consécutives. Nous en déduirons que les percussions sont, pour un système donné et réglé, toutes identiques entre elles, nous les nommerons "*percussions régulières*". Expérimentalement nous montrerons que cette condition est à la fois nécessaire et suffisante pour obtenir des percussions régulières.

Les systèmes à  $n = n^* = 1$

$n = n^* = 2$

seront analysés minutieusement car ils correspondent aux vibropercuteurs utilisés pour l'entonnement des pieux ou palplanches dans les travaux de génie civil.

## 1<sup>ère</sup> PARTIE

Etude théorique du système

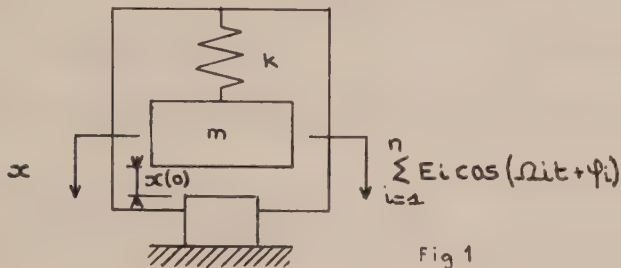
à  $n^*$  degrés de liberté

---



## PRELIMINAIRE

Généralités sur le système à un degré de liberté avec déplacement limité d'un seul côté, monté sur butée fixe et soumis à l'action d'une excitation complexe résultant de la superposition d'excitations périodiques.



Soit un système à un degré de liberté, de pulsation propre  $\omega_0$  et possédant  $n$  excitations périodiques de pulsations  $\Omega_1 \dots \Omega_n$  et de déphasages  $\varphi_1 \dots \varphi_n$  par rapport à l'origine des temps.

Nous supposons :

- le système non amorti
- le ressort  $k$  parfaitement linéaire et de masse négligeable
- les percussions instantanées
- le mouvement périodique, de période  $\tau$  ( $\tau$  est le temps qui s'écoule entre deux percussions consécutives)
- le déplacement continu

Equation du mouvement :

$$m x'' + k x = \sum_{i=1}^n E_i \cos(\Omega_i t + \varphi_i)$$

Par suite

$$(1) \quad \begin{cases} x = A \cos(\omega_0 t + \psi) + \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{1-r_i^2} \cos(\Omega_i t + \varphi_i) \\ x' = -A \omega_0 \sin(\omega_0 t + \psi) - \sum_{i=1}^n \frac{\Omega_i d_i}{1-r_i^2} \sin(\Omega_i t + \varphi_i) \\ x'' = -A \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \psi) - \sum_{i=1}^n \frac{\Omega_i^2 d_i}{1-r_i^2} \cos(\Omega_i t + \varphi_i) \end{cases}$$

$$\text{avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad r_i = \frac{\Omega_i}{\omega_0} \quad d_i = \frac{E_i}{k}$$

Ces équations sont linéaires entre deux percussions consécutives.  $A$  et  $\psi$  sont les constantes d'intégration dans les domaines linéaires.

Périodicité :

Le mouvement étant périodique, aux temps  $t = t_0$ ,  $t = t_0 + \tau \dots t = t_0 + \ell \tau$  quel que soit  $\ell$  entier, nous obtenons :

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x(t_0 + \tau) = \dots = x(t_0 + \ell \tau) \\ x'(t_0) &= x'(t_0 + \tau) = \dots = x'(t_0 + \ell \tau) \\ x''(t_0) &= x''(t_0 + \tau) = \dots = x''(t_0 + \ell \tau) \end{aligned}$$

Conditions initiales :

Choisissons comme origine des temps, l'instant d'une percussion, avec comme notations :

$t = 0^+$  immédiatement après la 1<sup>ère</sup> percussion

$t = \tau^-$  " avant la 2<sup>ème</sup> "

$t = \tau^+$  " après la 2<sup>ème</sup> "

-----  
 $t = \ell\tau^-$  " avant la  $(\ell+1)$  ième percussion

$t = \ell\tau^+$  " après " " "

quel que soit  $\ell$  entier

Les percussions étant instantanées  $\ell\tau^- = \ell\tau^+ = \ell\tau$  quel que soit  $\ell$  entier. Cependant, à chaque percussion, le déplacement de la masse  $m$  reste continu alors que sa vitesse présente une discontinuité (Fig. 2).

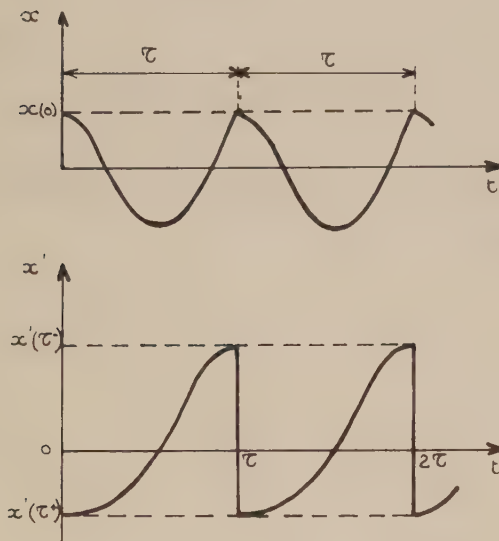


Fig 2

La périodicité entraîne :

$$\left. \begin{aligned} x(0) &= x(\tau) = \dots = x(\ell\tau) \\ x'(0^-) &= x'(\tau^-) = \dots = x'(\ell\tau^-) \\ x'(0^+) &= x'(\tau^+) = \dots = x'(\ell\tau^+) \\ x''(0^-) &= x''(\tau^-) = \dots = x''(\ell\tau^-) \\ x''(0^+) &= x''(\tau^+) = \dots = x''(\ell\tau^+) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Ainsi la vitesse de percussion  $x'(\tau^-)$  est une constante pour un système donné et réglé. Les percussions sont régulières.

Application des conditions de périodicité aux équations (1)

Nous désignerons par :

$A$  et  $\psi$  les constantes d'intégration pour  $0 < t_0 < \tau$

$(A+\Delta A)$  et  $(\psi+\Delta\psi)$  " " "  $\tau < t < 2\tau$

avec  $t = t_0 + \tau$

$$\left. \begin{aligned} x(t_0) &= A \cos(\omega_0 t_0 + \psi) + \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{1-r_i^2} \cos(\Omega_i t_0 + \psi_i) \\ x'(t_0 + \tau) &= (A + \Delta A) \cos[\omega_0(t_0 + \tau) + \psi + \Delta\psi] + \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{1-r_i^2} \cos[\Omega_i(t_0 + \tau) + \psi_i] \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} x'(t_0) &= -A\omega_0 \sin(\omega_0 t_0 + \psi) - \sum_{i=1}^n \frac{d_i \Omega_i}{1-r_i^2} \sin(\Omega_i t_0 + \psi_i) \\ x'(t_0 + \tau) &= -(A + \Delta A) \omega_0 \sin[\omega_0(t_0 + \tau) + \psi + \Delta\psi] - \sum_{i=1}^n \frac{d_i \Omega_i}{1-r_i^2} \sin[\Omega_i(t_0 + \tau) + \psi_i] \end{aligned} \right\} (4)$$

$$\left. \begin{aligned} x''(t_0) &= -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t_0 + \psi) - \sum_{i=1}^n \frac{d_i \Omega_i^2}{1-r_i^2} \cos(\Omega_i t_0 + \psi_i) \\ x''(t_0 + \tau) &= -(A + \Delta A) \omega_0^2 \cos[\omega_0(t_0 + \tau) + \psi + \Delta\psi] - \sum_{i=1}^n \frac{d_i \Omega_i^2}{1-r_i^2} \cos[\Omega_i(t_0 + \tau) + \psi_i] \end{aligned} \right\} (5)$$

$$\underline{x(t_0) = x(t_0 + \tau)} \quad \text{par suite}$$

$$\left\{ A \cos(\omega_0 t_0 + \psi) - (A + \Delta A) \cos[\omega_0(t_0 + \tau) + \psi + \Delta\psi] \right\} + \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{1-r_i^2} \left\{ \cos(\Omega_i t_0 + \psi_i) - \cos[\Omega_i(t_0 + \tau) + \psi_i] \right\} = 0$$

$$\underline{x'(t_0) = x'(t_0 + \tau)} \quad \text{d'où}$$

$$\left\{ A \sin(\omega_0 t_0 + \psi) - (A + \Delta A) \sin[\omega_0(t_0 + \tau) + \psi + \Delta\psi] \right\} + \sum_{i=1}^n \frac{d_i r_i}{1-r_i^2} \left\{ \sin(\Omega_i t_0 + \psi_i) - \sin[\Omega_i(t_0 + \tau) + \psi_i] \right\} = 0$$

$$\underline{x''(t_0) = x''(t_0 + \tau)} \quad \text{ainsi :}$$

$$\left\{ A \cos(\omega_0 t_0 + \psi) - (A + \Delta A) \cos[\omega_0(t_0 + \tau) + \psi + \Delta\psi] \right\} + \sum_{i=1}^n \frac{d_i r_i^2}{1-r_i^2} \left\{ \cos(\Omega_i t_0 + \psi_i) - \cos[\Omega_i(t_0 + \tau) + \psi_i] \right\} = 0$$

Les  $\Omega_i$  sont quelconques vis-à-vis de  $\omega_0$ , les  $d_i$  sont quelconques entre eux,  $t_0$  est variable de 0 à  $\tau$  (frontières exclues).

Le système ci-dessus n'est soluble que si et seulement si les quantités entre { } sont respectivement nulles. Nous obtenons :

- d'une part

$$A \cos(\omega_0 t_0 + \psi) = (A + \Delta A) \cos[\omega_0(t_0 + \tau) + \psi + \Delta\psi]$$

$$A \sin(\omega_0 t_0 + \psi) = (A + \Delta A) \sin[\omega_0(t_0 + \tau) + \psi + \Delta\psi]$$

$$\text{d'où} \quad \Delta A = 0$$

$$\boxed{\omega_0 \tau + \Delta\psi = 2n\pi} \quad (6)$$

- d'autre part

$$\cos(\Omega_i t_0 + \psi_i) = \cos[\Omega_i(t_0 + \tau) + \psi_i]$$

$$\sin(\Omega_i t_0 + \psi_i) = \sin[\Omega_i(t_0 + \tau) + \psi_i]$$

$$\text{soit} \quad \boxed{\Omega_i \tau = 2N_i \pi} \quad (7) \quad N_i : \text{entier}$$

Application des expressions (6) et (7) aux conditions initiales :

$$x(0) = A \cos \psi + \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{1-r_i^2} \cos \psi_i$$

$$x(\tau^-) = A \cos(\omega_0 \tau + \psi) + \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{1-r_i^2} \cos \psi_i$$

$$x(\tau^+) = A \cos(\omega_0 \tau + \psi + \Delta\psi) + \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{1-r_i^2} \cos \psi_i$$

$$x'(0) = -A\omega_0 \sin \psi - \sum_{i=1}^n \frac{d_i \Omega_i}{1-r_i^2} \sin \psi_i$$

$$x'(\tau^-) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 \tau + \psi) - \sum_{i=1}^n \frac{d_i \Omega_i}{1-r_i^2} \sin \psi_i$$

$$x'(\tau^+) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 \tau + \psi + \Delta\psi) - \sum_{i=1}^n \frac{d_i \Omega_i}{1-r_i^2} \sin \psi_i$$

or  $\underline{x(0) = x(\tau^-) = x(\tau^+)}$

d'où  $A \cos \psi = A \cos(\omega_0 \tau + \psi) = A \cos(\omega_0 \tau + \psi + \Delta\psi)$  (8)

$$\underline{x'(0) = x'(\tau^+)}$$

$$A \sin \psi = A \sin(\omega_0 \tau + \psi) \quad (9)$$

$$\underline{x'(0) \neq x'(\tau^-)}$$

$$A \sin \psi \neq A \sin(\omega_0 \tau + \psi + \Delta\psi) \quad (10)$$

en conséquence, ces trois dernières relations entraînent :

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= 2\psi \\ \omega_0 \tau &= 2n\pi - 2\psi \end{aligned} \quad (11)$$

or d'après 7  $\tau = \frac{2N_i\pi}{\Omega_i}$

ainsi  $\psi = \pi \left( n - \frac{N_i}{r_i} \right)$

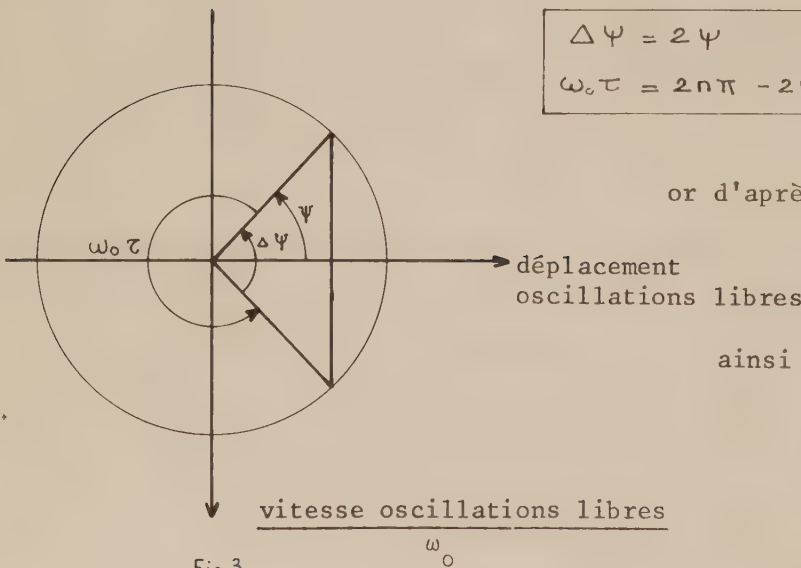


Fig 3

### Conclusions :

1) Les percussions seront régulières, pour un système vibrant à un degré de liberté muni de  $n$  excitations sinusoïdales si :

*"entre deux percussions consécutives le nombre de cycles décrits par chaque excitation est un entier"*. Il existe donc une relation entre les fréquences d'excitations qui ne peuvent être quelconques.

2) L'amplitude des oscillations libres est indépendante du temps et du nombre de percussions.

3) Le déphasage  $\psi$  du terme des oscillations libres par rapport à l'origine des temps vaut :

$$\psi = \pi \left( n - \frac{N_i}{r_i} \right), \text{ } n \text{ et } N_i \text{ entiers quel que soit } i$$

4) A chaque percussion,  $\psi$  subit une variation instantanée  $\Delta\psi$  telle que  $\Delta\psi = 2\psi$  à  $2n\pi$  près.

Nous venons de voir que, si le temps qui s'écoule entre deux percussions consécutives est constant pour un système donné et réglé, les percussions sont régulières. Il est possible de montrer que cette condition suffisante est également nécessaire pour obtenir des percussions régulières.

Remarquons enfin que le développement exposé suppose  $x(t) < x(0)$  quel que soit  $t$ ,  $\ell\tau < t < (\ell + 1)\tau$  avec  $\ell$  entier, la butée étant fixe.



## CHAPITRE I

### ETUDE THEORIQUE DU SYSTEME A $n^*$ DEGRES DE LIBERTE

#### 1 - PRELIMINAIRE -

Le schéma de principe du système est représenté Fig. 1.

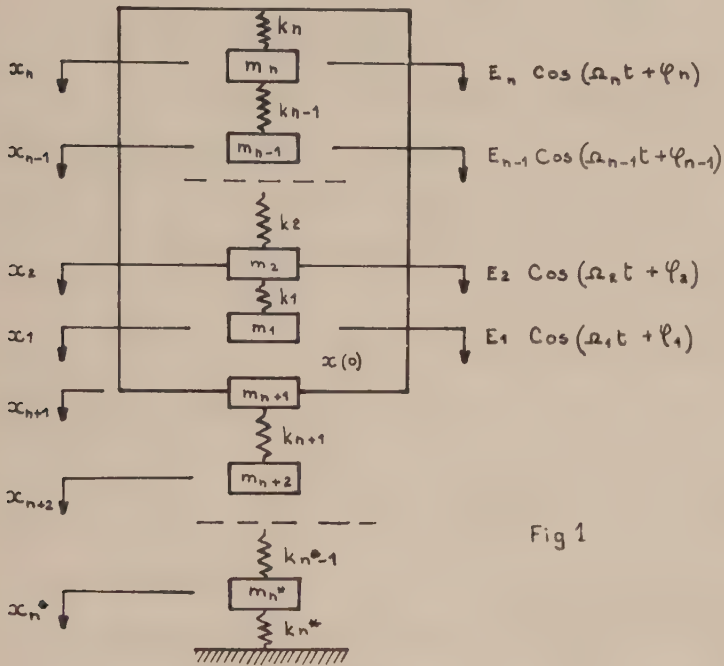


Fig 1

Le générateur de percussions comprend :

- . n masses :  $m_1 \dots m_n$
  - . n ressorts :  $k_1 \dots k_n$
  - . n excitations sinusoïdales :  
(une seule par masse)
    - d'amplitude  $E_1 \dots E_n$
    - de pulsations  $\Omega_1 \dots \Omega_n$
    - de déphasages  $\phi_1 \dots \phi_n$
- par rapport à l'origine des temps.

La butée est composée de :

- .  $(n^*-n)$  masses :  $m_{n+1} \dots m_{n^*}$
- .  $(n^*-n)$  ressorts :  $k_{n+1} \dots k_{n^*}$

Les déplacements absolus seront positifs dans le sens indiqué sur le schéma. Chaque origine sera prise au centre de gravité de la masse considérée, le système étant au repos.

La distance des masses  $m_1$  et  $m_{n+1}$ , mesurée au repos, notée  $x(0)$  et dénommée "interstice réel" peut être positive, nulle ou négative.

L'étude des vibrations forcées du système ainsi défini sera limitée aux percussions régulières.

#### 2 - HYPOTHESES -

Nous retiendrons les hypothèses suivantes :

- 2-1 : Le système vibrant n'est pas amorti.
- 2-2 : Les ressorts sont parfaitement linéaires et de masses négligeables.
- 2-3 : Les percussions sont instantanées.
- 2-4 : Les déplacements des masses sont continus.
- 2-5 : Les vitesses des masses sont continues, à l'exception de celles de  $m_1$  et  $m_{n+1}$  à l'instant des collisions.

## 3 - EQUATIONS LINEAIRES -

Dans les domaines linéaires, l'équation matricielle du mouvement s'écrit :

$$MX'' + KX = F \quad \text{avec :}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ \vdots \\ x_{n^*} \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} m_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & m_n & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & m_{n^*} \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} E_1 \cos(\Omega_1 t + \phi_1) \\ \vdots \\ E_n \cos(\Omega_n t + \phi_n) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & & & & \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & & & 0 \\ & -k_2 & \ddots & & -k_{n-1} & \\ & & -k_{n-1} & k_{n-1} + k_n & -k_n & \\ & & & -k_n & \ddots & \\ 0 & & & & & -k_{n-1}^* \\ & & & & -k_{n-1}^* & k_{n-1}^* + k_n^* \end{bmatrix}$$

Le système d'équations différentielles du mouvement est non linéaire. En effet, à chaque percussion, il se produit une variation instantanée des vitesses de  $m_1$  et  $m_{n+1}$ , alors que leurs déplacements respectifs restent continus. Cependant, entre deux percussions consécutives, le système est linéaire et par suite intégrable par les méthodes classiques, les constantes d'intégration étant déterminées à partir des conditions initiales.

Les solutions de la relation matricielle peuvent s'exprimer :

$$x_p = \sum_{j=1}^{n^*} z_{j,p} A_j \cos(\omega_j t + \psi_j) + \sum_{i=1}^n d_{i,p}^i E_i \cos(\Omega_i t + \phi_i)$$

ou encore

$$x_p = \sum_{j=1}^{n^*} z_{j,p} q_j \quad \text{quel que soit } p \text{ variant de } 1 \text{ à } n^*$$

avec

$$q_j = A_j \cos(\omega_j t + \psi_j) + \sum_{k=1}^{n^*} \gamma_{k,j} \sum_{i=1}^n d_{i,k}^i E_i \cos(\Omega_i t + \phi_i) \quad \text{quel que soit } j \text{ variant de } 1 \text{ à } n^*$$

.  $A_j$ ,  $\psi_j$  constantes d'intégration

.  $z_{j,p}$  est le  $p^{\text{ième}}$  élément du vecteur propre colonne  $Z_j$  défini par la relation matri-

cielle  $|K - \lambda_j M| |Z_j| = 0$   $\lambda_j$  étant la  $j^{\text{ième}}$  valeur propre annulant le déterminant  $|K - \lambda M|$

En prenant 1 comme détermination de  $z_{j,1}$ , nous pouvons établir la relation de récurrence permettant de calculer tous les  $z_{j,p}$  pour  $p$  supérieur à 1.

$$\bar{z}_{j,p} = -\frac{k_{p-2}}{k_{p-1}} \bar{z}_{j,p-2} + \left( \frac{k_{p-2}}{k_{p-1}} + 1 - \frac{\omega_j^2}{\omega_{0,p-1}^2} \right) \bar{z}_{j,p-1} \quad \bar{z}_{j,1} = 1$$

avec  $\omega_j$  :  $j^{\text{ième}}$  pulsation propre du système,  $\omega_j^2 = \lambda_j$

$$\omega_{0,p-1} = \sqrt{\frac{k_{p-1}}{m_{p-1}}}$$

De plus, remarquons que le développement du déterminant  $[K - \lambda M]$  conduit à une équation de degrés  $n^*$  en  $\lambda$  :

$$\lambda^{n^*} + C_{n^*-1} \lambda^{n^*-1} + \dots + C_j \lambda^j + \dots + C_1 \lambda + C_0 = 0$$

Nous en déduisons, en posant  $\omega_{0j} = \sqrt{\frac{k_j}{m_j}}$  quel que soit  $j$  variant de 1 à  $n^*$

$$\omega_1 \omega_2 \dots \omega_j \dots \omega_{n^*} = \omega_{01} \omega_{02} \dots \omega_{0j} \dots \omega_{0n^*}$$

$a_{i,p}^j$  est l'élément de la matrice

$$|K - \Omega_i^2 M|^{-1} = \begin{vmatrix} a_{1,1}^i & \dots & a_{i,1}^i & \dots & a_{n^*,1}^i \\ a_{1,p}^i & \dots & a_{i,p}^i & \dots & a_{n^*,p}^i \\ a_{1,n^*}^i & \dots & a_{i,n^*}^i & \dots & a_{n^*,n^*}^i \end{vmatrix}$$

. Les variables fictives sont définies pour la relation  $Q = Z^{-1} X$

$$Q = \begin{vmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_j \\ \vdots \\ q_{n^*} \end{vmatrix} \quad Z : \text{matrice des vecteurs propres } Z_j$$

$y_{k,j}$  est l'élément de la  $k^{\text{ième}}$  colonne et de la  $j^{\text{ième}}$  ligne de  $Z^{-1}$ , matrice inverse de celle des vecteurs propres.

Les expressions des vitesses seront ainsi :

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= - \sum_{j=1}^{n^*} \bar{z}_{j,p} A_j \omega_j \sin(\omega_j t + \psi_j) - \sum_{i=1}^n a_{i,p}^i E_i \Omega_i \sin(\Omega_i t + \varphi_i) \\ \dot{q}_p &= - A_j \omega_j \sin(\omega_j t + \psi_j) - \sum_{k=1}^n y_{k,j} \sum_{i=1}^n a_{i,k}^i E_i \Omega_i \sin(\Omega_i t + \varphi_i) \end{aligned}$$

paramètres connus initialement :  $m_i, k_i, E_i, \Omega_i, x(0)$

avec  $E_{n+1} = E_{n+2} = \dots = E_{n^*} = 0$

paramètres déterminés :  $z_{j,p}, a_{i,p}^i, y_{k,j}$

paramètres inconnus :  $A_j, x_j$  ou  $q_j, \psi_j, \phi_j$

quel que soit  $i, j, p, k$  variant de 1 à  $n^*$

#### 4 - CONDITIONS INITIALES -

Choisissons comme origine des temps l'instant d'une collision, les percussions successives se produiront aux temps  $t = 0, \tau, \dots, \ell\tau \dots$  quel que soit  $\ell$  entier, le mouvement étant périodique de période  $\tau$ . Nous noterons :

$\ell\tau^-$  le temps immédiatement avant la  $(\ell+1)^{\text{ième}}$  percussion  
 $\ell\tau^+$  " " " après " "

Il est évident que  $\ell\tau^- = \ell\tau^+ = \ell\tau$ , les percussions étant supposées instantanées. Cependant "entre"  $\ell\tau^-$  et  $\ell\tau^+$  les vitesses des masses  $m_1$  et  $m_{n+1}$  subissent une discontinuité alors que leurs déplacements restent inchangés.

Les conditions initiales s'expriment alors :

##### . continuité des déplacements

$x_p(\ell\tau^-) = x_p(\ell\tau^+)$  quel que soit  $p$  variant de 1 à  $n^*$   
 ainsi  $x(0) = x_1(\ell\tau^-) - x_{n+1}(\ell\tau^-) = x_1(\ell\tau^+) - x_{n+1}(\ell\tau^+)$

##### . continuité des vitesses (sauf pour $m_1$ et $m_{n+1}$ )

$x'_p(\ell\tau^-) = x'_p(\ell\tau^+)$  quel que soit  $p$  variant de 2 à  $n^*$   
 $p \neq n+1$

##### . discontinuité des vitesses de $m_1$ et $m_{n+1}$

$x'_1(\ell\tau^-) \neq x'_1(\ell\tau^+)$   $x'_{n+1}(\ell\tau^-) \neq x'_{n+1}(\ell\tau^+)$

La vitesse de percussion est la vitesse relative de  $m_1$  et  $m_{n+1}$  lors d'une collision :

$x'(\ell\tau^-) = x'_1(\ell\tau^-) - x'_{n+1}(\ell\tau^-)$

et la vitesse relative de  $m_1$  et  $m_{n+1}$ , immédiatement après percussion peut s'écrire :

$x'(\ell\tau^+) = x'_1(\ell\tau^+) - x'_{n+1}(\ell\tau^+)$

Physiquement :

$x'(\ell\tau^-) \neq x'(\ell\tau^+)$

5 - PERIODICITE -

Le mouvement étant périodique, aux instants  $t = t_i, t_i + \tau, \dots, t_i + \ell\tau, \dots$  le déplacement, la vitesse et l'accélération de chaque masse sont respectivement identiques.

Ainsi, notamment :

$$\begin{aligned}x_p(0) &= x_p(\tau) = \dots = x_p(\ell\tau) \\x'_p(0) &= x'_p(\tau^-) = \dots = x'_p(\ell\tau^-) \\x'_p(0^+) &= x'_p(\tau^+) = \dots = x'_p(\ell\tau^+)\end{aligned}$$

En appliquant ces résultats à l'expression de la vitesse de percussion, nous obtenons :

$$x'(0^-) = x'(\tau^-) = \dots = x'(\ell\tau^-) \quad \text{quel que soit } \ell \text{ entier}$$

de même

$$x'(0^+) = x'(\tau^+) = \dots = x'(\ell\tau^+)$$

Ainsi "pour un système donné et réglé, la périodicité des percussions (période  $\tau$  entre deux percussions consécutives) entraîne la régularité de ces percussions"

Définissons un "coefficient de restitution de vitesse  $R$ " comme étant le rapport, en valeur absolue, des vitesses relatives de  $m_1$  et  $m_{n+1}$  respectivement immédiatement après et avant percussion.

$$R = \left| \frac{x'(\tau^+)}{x'(\tau^-)} \right| \quad \text{ou} \quad x'(\tau^+) = -R x'(\tau^-)$$

Physiquement  $R$  est compris entre 0 et 1.

6 - RESOLUTION -6,1 Préliminaire

Nous allons montrer que le système proposé est équivalent à  $n^*$  systèmes fictifs à un degré de liberté avec déplacement limité d'un seul côté.

Chaque système fictif obéit à l'équation :

$$q_j = A_j \cos(\omega_j t + \psi_j) + \sum_{k=1}^{n^*} y_{k,j} \sum_{i=1}^n \sigma_{i,k}^j E_i \cos(\Omega_i t + \varphi_i)$$

c'est un système à un degré de liberté possédant  $n$  excitations sinusoïdales, de pulsation propre  $\omega_j$ .

En se rappelant que la relation liant le système réel aux  $n^*$  systèmes fictifs est  $X = ZQ$ , il est immédiat que la périodicité du mouvement implique la périodicité de chaque système fictif et qu'en conséquence :

$$\begin{aligned} q_j(o) &= q_j(\tau) = \dots = q_j(l\tau) \\ q'_j(o^-) &= q'_j(\tau^-) = \dots = q'_j(l\tau^-) \\ q'_j(o^+) &= q'_j(\tau^+) = \dots = q'_j(l\tau^+) \\ q''_j(o^-) &= q''_j(\tau^-) = \dots = q''_j(l\tau^-) \\ q''_j(o^+) &= q''_j(\tau^+) = \dots = q''_j(l\tau^+) \end{aligned}$$

Analysons ces variables fictives lors de chaque percussion. Soient  $\Delta X$  et  $\Delta X'$  les matrices colonnes des variations des déplacements et vitesses lors des collisions.

D'après  $X = ZQ$

$$\Delta X = \Delta(ZQ) = Z \Delta Q$$

$$\Delta X' = \Delta(ZQ') = Z \Delta Q'$$

$$\text{ou } \begin{cases} \Delta Q = Z^{-1} \Delta X \\ \Delta Q' = Z^{-1} \Delta X' \end{cases}$$

ce qui peut s'explicitier :

#### . déplacements fictifs

$$\Delta Q = \begin{vmatrix} q_1(l\tau^-) - q_1(l\tau^+) \\ \dots \\ q_{n^*}(l\tau^-) - q_{n^*}(l\tau^+) \end{vmatrix} = Z^{-1} \begin{vmatrix} x_1(l\tau^-) - x_1(l\tau^+) \\ \dots \\ x_{n^*}(l\tau^-) - x_{n^*}(l\tau^+) \end{vmatrix} = Z^{-1} \begin{vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix}$$

|                                    |                                        |
|------------------------------------|----------------------------------------|
| d'où $q_j(l\tau^-) = q_j(l\tau^+)$ | quel que soit $j$ variant de 1 à $n^*$ |
|                                    | " " " $l$ entier                       |

*"Les déplacements fictifs sont continus"*

#### . vitesse fictives

$$\Delta Q' = \begin{vmatrix} q'_1(l\tau^-) - q'_1(l\tau^+) \\ \dots \\ q'_{n^*}(l\tau^-) - q'_{n^*}(l\tau^+) \end{vmatrix} = Z^{-1} \begin{vmatrix} x'_1(l\tau^-) - x'_1(l\tau^+) \\ \dots \\ x'_{n^*}(l\tau^-) - x'_{n^*}(l\tau^+) \end{vmatrix} = Z^{-1} \begin{vmatrix} x'_1(l\tau^-) - x'_1(l\tau^+) \\ 0 \\ x'_{n+1}(l\tau^-) - x'_{n+1}(l\tau^+) \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix}$$

La théorie de la conservation de la quantité de mouvement nous permet d'écrire :

$$m_1 [x'_1(\ell\tau^-) - x'_1(\ell\tau^+)] = -m_{n+1} [x'_{n+1}(\ell\tau^-) - x'_{n+1}(\ell\tau^+)]$$

En transformant cette équation et en utilisant la définition du coefficient de restitution de vitesse, nous obtenons :

$$x'_1(\ell\tau^-) - x'_1(\ell\tau^+) = \frac{m_{n+1}}{m_1 + m_{n+1}} (1+R) x'(\tau^-)$$

$$x'_{n+1}(\ell\tau^-) - x'_{n+1}(\ell\tau^+) = -\frac{m_1}{m_1 + m_{n+1}} (1+R) x'(\tau^-)$$

par suite :

$$\Delta Q' = Z^{-1} \begin{vmatrix} m_{n+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -m_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix} \frac{1+R}{m_1 + m_{n+1}} x'(\tau^-)$$

d'où :

$$q'_j(\ell\tau^-) - q'_j(\ell\tau^+) = \frac{y_{1,j} m_{n+1} - y_{n+1,j} m_1}{m_1 + m_{n+1}} (1+R) x'(\tau^-) \quad (6-0)$$

quel que soit  $j$  variant de 1 à  $n^*$  quel que soit  $\ell$  entier

Notons que  $q_j(\ell\tau^-) \neq q'_j(\ell\tau^+)$  sauf si la vitesse réelle de percussion  $x'(\tau^-)$  est nulle.

Il est désormais clair que chaque système fictif est bien un système à un degré de liberté avec déplacement limité d'un seul côté.

En appliquant les résultats théoriques obtenus pour un tel système dans le préliminaire de cette partie, nous obtenons :

$$(6-1) \quad \boxed{\Omega_i \tau = 2 N_i \pi}$$

quel que soit  $i$  variant de 1 à  $n$   
 $N_i$  entier

Les percussions ne seront régulières pour un système donné et réglé que si le nombre de cycles décrits par l'excitation entre deux collisions consécutives est un entier (*Première condition de régularité des percussions*).

$$\psi_j = \pi \left( n_j - N_i \frac{\omega_j}{\Omega_i} \right) \quad n_j \text{ et } N_i \text{ entiers,}$$

c'est la valeur du déphasage du  $j^{\text{ième}}$  terme d'oscillations libres par rapport à l'origine des temps.

Nous noterons :

$$r_{i,j} = \frac{\Omega_i}{\omega_j}, \text{ nombre sans dimension.}$$

par suite :

$$(6-2) \quad \psi_j = \pi \left( n_j - \frac{N_i}{r_{i,j}} \right)$$

chaque vitesse fictive se met sous la forme :

$$q'_j = -A_j \omega_j \sin(\omega_j t + \psi_j) - \sum_{k=1}^{n^*} y_{k,j} \sum_{i=1}^n a_{i,k}^i E_i \Omega_i \sin(\Omega_i t + \varphi_i)$$

en se rappelant que  $\sin(\omega_j \tau + \psi_j) = -\sin \psi_j$

$$q'_j(\tau^-) - q'_j(\tau^+) = q'_j(\tau^-) - q'_j(0^+) = 2 A_j \omega_j \sin \psi_j$$

ou encore, d'après la relation (6-0)

$$(6-3) \quad 2 A_j \omega_j \sin \psi_j = \frac{y_{1,j} m_{n+1} - y_{n+1,j} m_1}{m_1 + m_{n+1}} (1+R) x'(\tau)$$

quel que soit  $j$  variant de 1 à  $n^*$

## 6,2 Autres équations

### + Interstice

L'interstice réel vaut :

$$x(0) = x_1(l\tau) - x_{n+1}(l\tau) \quad \text{quel que soit } l \text{ entier}$$

soit pour  $l=0$   $x(0) = x_1(0) - x_{n+1}(0)$

$$\text{or} \quad \begin{cases} x_1(0) = \sum_{j=1}^{n^*} \bar{z}_{j,1} A_j \cos \psi_j + \sum_{i=1}^n a_{i,1}^i E_i \cos \varphi_i \\ x_{n+1}(0) = \sum_{j=1}^{n^*} \bar{z}_{j,n+1} A_j \cos \psi_j + \sum_{i=1}^n a_{i,n+1}^i E_i \cos \varphi_i \end{cases}$$

d'où :

$$(6-4) \quad x(0) = \sum_{j=1}^{n^*} (\bar{z}_{j,1} - \bar{z}_{j,n+1}) A_j \cos \psi_j + \sum_{i=1}^n (a_{i,1}^i - a_{i,n+1}^i) E_i \cos \varphi_i$$

### + vitesse de percussion

$$x'(\tau^-) = x'_1(\tau^-) - x'_{n+1}(\tau^-)$$

Exprimons  $x'_1(\tau^-)$  et  $x'_{n+1}(\tau^-)$  en se rappelant que

$$\begin{cases} \sin(\Omega_i \tau + \phi_i) = \sin \phi_i \\ \sin(\omega_j \tau + \psi_j) = -\sin \psi_j \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'_1(\tau) = \sum_{j=1}^{n^*} \zeta_{j,1} A_j \omega_j \sin \psi_j - \sum_{i=1}^n a_{i,1}^i E_i \Omega_i \sin \phi_i \\ x'_{n+1}(\tau) = \sum_{j=1}^{n^*} \zeta_{j,n+1} A_j \omega_j \sin \psi_j - \sum_{i=1}^n a_{i,n+1}^i E_i \Omega_i \sin \phi_i \end{cases}$$

Nous en déduisons :

$$x'(\tau) = \sum_{j=1}^{n^*} (\zeta_{j,1} - \zeta_{j,n+1}) A_j \omega_j \sin \psi_j - \sum_{i=1}^n (a_{i,1}^i - a_{i,n+1}^i) E_i \Omega_i \sin \phi_i$$

or, d'après la relation (6-3) nous pouvons écrire :

$$\sum_{j=1}^{n^*} (\zeta_{j,1} - \zeta_{j,n+1}) A_j \omega_j \sin \psi_j = \underbrace{\left( \frac{1+R}{2} \right) x'(\tau) \sum_{j=1}^{n^*} (\zeta_{j,1} - \zeta_{j,n+1}) \frac{y_{1,j} m_{n+1} - y_{n+1,j} m_1}{m_1 + m_{n+1}}}_{=1}$$

par suite :

$$(6-5) \quad \frac{1-R}{2} x'(\tau) = - \sum_{i=1}^n (a_{i,1}^i - a_{i,n+1}^i) E_i \Omega_i \sin \phi_i$$

### 6,3 Résolution

Récapitulons les équations :

$$(6-2) \quad \psi_j = \pi \left( n_j - \frac{N_i}{r_{i,j}} \right) \quad \text{avec} \quad r_{i,j} = \frac{r_{i,j}}{\omega_j}$$

$$(6-3) \quad A_j \omega_j \sin \psi_j = \frac{1}{2} \frac{y_{1,j} m_{n+1} - y_{n+1,j} m_1}{m_1 + m_{n+1}} (1+R) x'(\tau)$$

$$(6-4) \quad x(0) = \sum_{j=1}^{n^*} (\zeta_{j,1} - \zeta_{j,n+1}) A_j \cos \psi_j + \sum_{i=1}^n (a_{i,1}^i - a_{i,n+1}^i) E_i \cos \phi_i$$

$$(6-5) \quad \left( \frac{1-R}{2} \right) x'(\tau) = - \sum_{i=1}^n (a_{i,1}^i - a_{i,n+1}^i) E_i \Omega_i \sin \phi_i$$

Remarquons que dans la relation (6-4)

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n^*} (\zeta_{j,1} - \zeta_{j,n+1}) A_j \cos \psi_j &= \sum_{j=1}^{n^*} (\zeta_{j,1} - \zeta_{j,n+1}) A_j \frac{\sin \psi_j}{\tan \psi_j} \\ &= \left( \frac{1+R}{2} \right) \frac{x'(\tau)}{m_1 + m_{n+1}} \sum_{j=1}^{n^*} (\zeta_{j,1} - \zeta_{j,n+1}) \frac{(y_{1,j} m_{n+1} - y_{n+1,j} m_1)}{\omega_j \tan \psi_j} \end{aligned}$$

d'où :

$$(6-4') \quad \left\| \begin{aligned} x(0) = x'(\tau^-) \left( \frac{1+R}{2} \right) \frac{1}{m_1 + m_{n+1}} \sum_{j=1}^{n*} \frac{(\tilde{z}_{j,1} - \tilde{z}_{j,n+1})(y_{1,j} m_{n+1} - y_{n+1,j} m_1)}{\omega_j \operatorname{tg} \psi_j} \\ + \sum_{i=1}^n (a_{i,1}^i - a_{i,n+1}^i) E_i \cos \psi_i \end{aligned} \right.$$

Prenons comme référence la  $k^{\text{ième}}$  excitation ( $1 \leq k \leq n$ ) de telle sorte que

$$(6-6) \quad \left\| \begin{aligned} \phi_i - \phi_k = \theta_i \end{aligned} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta_i \text{ déphasage relatif à l'origine des temps} \\ \text{de la } i^{\text{ème}} \text{ excitation par rapport à la} \\ k^{\text{ième}}. \end{array} \right.$$

$$(6-7) \quad \left\| \begin{aligned} \frac{\Omega_i}{\Omega_k} = \frac{N_i}{N_k} = \gamma_i \end{aligned} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} - \text{rapport sans dimension} \\ - \text{quel que soit } i \text{ variant de } 1 \text{ à } n \end{array} \right.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} x(0) &= \left( \frac{1+R}{2} \right) a_1 x'(\tau^-) + a_2 \cos \psi_k - a_3 \sin \psi_k \\ \left( \frac{1-R}{2} \right) x'(\tau^-) &= -a_4 \cos \psi_k - a_5 \sin \psi_k \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{m_1 + m_{n+1}} \sum_{j=1}^{n*} \frac{(\tilde{z}_{j,1} - \tilde{z}_{j,n+1})(y_{1,j} m_{n+1} - y_{n+1,j} m_1)}{\omega_j \operatorname{tg} \psi_j} \\ a_2 &= \sum_{i=1}^n (a_{i,1}^i - a_{i,n+1}^i) E_i \cos \theta_i \\ a_3 &= \sum_{i=1}^n (a_{i,1}^i - a_{i,n+1}^i) E_i \sin \theta_i \\ a_4 &= \sum_{i=1}^n (a_{i,1}^i - a_{i,n+1}^i) E_i \Omega_i \sin \theta_i \\ a_5 &= \sum_{i=1}^n (a_{i,1}^i - a_{i,n+1}^i) E_i \Omega_i \cos \theta_i \end{aligned}$$

En multipliant  $x(0)$  par  $a_4$  puis  $a_5$  et en ajoutant puis retranchant  $x'(\tau^-) \left( \frac{1-R}{2} \right)$  respectivement multiplié par  $a_2$  puis  $a_3$  il vient :

$$(6-7') \quad [a_3 a_4 + a_2 a_5] \sin \psi_k = \left( \frac{1+R}{2} a_1 a_4 - \frac{1-R}{2} a_2 \right) x'(\tau^-) - a_4 x(0)$$

$$[a_3 a_4 + a_2 a_5] \cos \psi_k = -\left( \frac{1+R}{2} a_1 a_5 + \frac{1-R}{2} a_3 \right) x'(\tau^-) + a_5 x(0)$$

$$\alpha \sin \psi_k = \varepsilon \sqrt{\alpha^2 - \alpha^2 \cos^2 \psi_k} \quad \varepsilon = \pm 1$$

d'où :

$$\left(\frac{1+R}{2} a_1 a_4 - \frac{1-R}{2} a_2\right) x'(\tau) - a_4 x(0) =$$

$$\varepsilon \sqrt{[a_3 a_4 + a_2 a_5]^2 - \left\{ -\left[\frac{1+R}{2} a_1 a_5 + \frac{1-R}{2} a_3\right] x'(\tau) + a_5 x(0) \right\}^2}$$

En élevant au carré et en ordonnant :

$$[\xi_1^2 + \xi_2^2] x'^2(\tau) - 2[\xi_1 a_4 + \xi_2 a_5] x(0) x'(\tau) + (a_4^2 + a_5^2) x^2(0) - [a_3 a_4 + a_2 a_5]^2 = 0$$

avec :

$$\xi_1 = \frac{1+R}{2} a_1 a_4 - \frac{1-R}{2} a_2$$

$$\xi_2 = \frac{1+R}{2} a_1 a_5 + \frac{1-R}{2} a_3$$

La solution de l'équation du second degré en  $x'(\tau)$  est :

$$\frac{x'(\tau)}{x(0)} = \frac{a_4 \xi_2 + a_5 \xi_1 + \varepsilon \sqrt{\left[\frac{a_3 a_4 + a_2 a_5}{x(0)}\right]^2 [\xi_1^2 + \xi_2^2] - (a_5 \xi_1 - a_4 \xi_2)^2}}{\xi_1^2 + \xi_2^2}$$

Transformons légèrement cette expression pour la mettre sous forme adimensionnelle en fonction de la  $\ell^{\text{ième}}$  pulsation propre du système ( $1 \leq \ell \leq n^*$ )

Pour cela posons :

$$\boxed{a_j = \frac{\omega_\ell}{\omega_j}}$$

$$\text{et } b_1 = \Omega_k a_1$$

$$\frac{b_2}{x(0)} = \frac{a_2}{x(0)}$$

$$\frac{b_3}{x(0)} = \frac{a_3}{x(0)}$$

$$b_4 = \frac{a_4}{\Omega_k}$$

$$b_5 = \frac{a_5}{\omega_k}$$

toutes ces relations sont sans dimension

Remarquons que  $a_1 a_4 = b_1 b_4$  et  $a_1 a_5 = b_1 b_5$

Il vient ainsi :

$$\begin{aligned}
 (6-8) \quad \left\{ \begin{aligned}
 b_1 &= \frac{r_{k,l}}{m_1 + m_{n+1}} \sum_{j=1}^{n^*} \frac{(z_{j,1} - z_{j,n+1}) (y_{1,j}^{m_{n+1}} - y_{n+1,j}^{m_1})}{t_g \psi_j} \alpha_j \\
 b_2 &= \sum_{i=1}^n (a_{i,1}^i - a_{i,n+1}^i) E_i \cos \theta_i \\
 b_3 &= \sum_{i=1}^n (a_{i,1}^i - a_{i,n+1}^i) E_i \sin \theta_i \\
 b_4 &= \sum_{i=1}^n (a_{i,1}^i - a_{i,n+1}^i) E_i \gamma_i \sin \theta_i \\
 b_5 &= \sum_{i=1}^n (a_{i,1}^i - a_{i,n+1}^i) E_i \gamma_i \cos \theta_i
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$(6-9) \quad \left\{ \begin{aligned}
 \xi_1 &= \frac{1+R}{2} b_1 b_4 - \frac{1-R}{2} b_2 \\
 \xi_2 &= \frac{1+R}{2} b_1 b_5 + \frac{1-R}{2} b_3
 \end{aligned} \right.$$

Les solutions s'expriment alors :

$$(6-10) \quad \left\| \frac{x'(\tau)}{x(0) \omega_e} = r_{k,e} \frac{b_4 \xi_1 + b_5 \xi_2 + \varepsilon \sqrt{[b_4 \frac{b_3}{x(0)} + b_5 \frac{b_2}{x(0)}]^2 [\xi_1^2 + \xi_2^2] - [b_5 \xi_1 - b_4 \xi_2]^2}}{\xi_1^2 + \xi_2^2} \right.$$

$$\varepsilon = \pm 1$$

de (6-3) nous tirons :

$$(6-11) \quad \left\| \frac{A_j}{x(0)} = \frac{1+R}{2} \frac{y_{1,j} m_{n+1} - y_{n+1,j} m_1}{m_1 + m_{n+1}} \frac{1}{\sin \psi_j} \frac{x'(\tau)}{x(0) \omega_e} \alpha_j
 \right.$$

de (6-7') nous déduisons :

$$(6-12) \quad \left\| \sin \varphi_k = \frac{1}{b_4 \frac{b_3}{x(0)} + b_5 \frac{b_2}{x(0)}} \left[ \xi_1 \frac{x'(\tau)}{x(0) \omega_e} - \frac{1}{r_{k,e}} - b_4 \right]
 \right.$$

#### 6,4 Conditions d'existence des percussions régulières

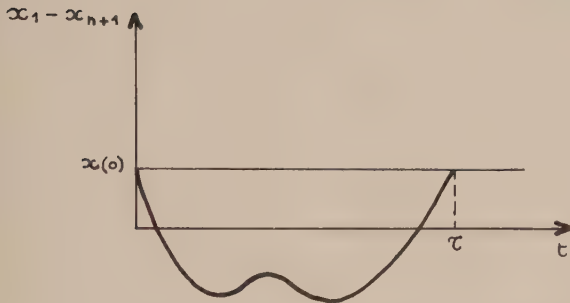
##### Conditions nécessaires :

- l'expression sous le radical de  $\frac{x'(\tau^-)}{x(o)\omega_1}$  est positive ou nulle
- la vitesse de percussion est positive

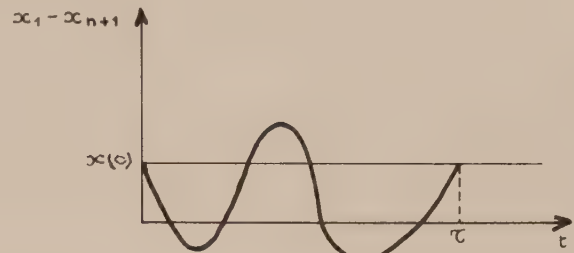
##### Conditions de régularité des percussions :

1ère condition =  $N_1$  entier

2ème condition =  $x_1(t) - x_{n+1}(t) < x(o)$  pour  $l\tau < t < (l+1)\tau$  quel que soit  $l$  entier.



2ème condition vérifiée



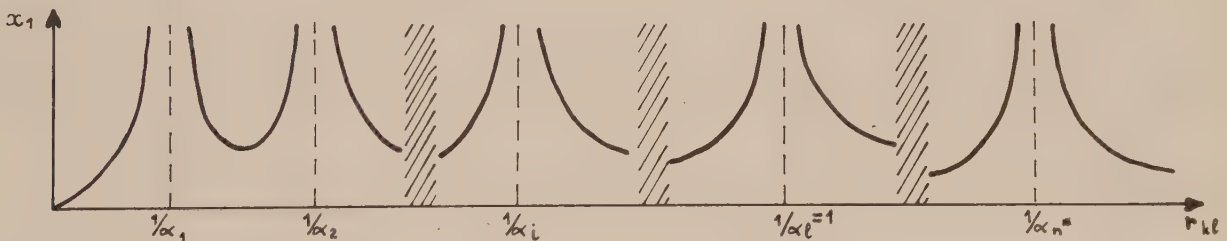
2ème condition non vérifiée

Si la deuxième condition n'est pas vérifiée, les percussions sont irrégulières, c'est-à-dire que la vitesse de percussion varie d'une percussion à la suivante.

#### 6,5 Cas particuliers

$$1 - \alpha_i r_{kl} = 1$$

Sans butée,  $x(o) \rightarrow \infty$ , avec  $n^*$  degrés de liberté, le déplacement du percuteur aurait l'allure suivante :



Pour  $r_{kl} = 1/\alpha_i$ , quel que soit  $i$  variant de 1 à  $n^*$ , le déplacement du percuteur et par suite sa vitesse seraient infinis pour un système non amorti.

Avec butée, c'est-à-dire  $x(o)$  fini, le déplacement et la vitesse du percuteur sont finis pour ces valeurs de  $r_{kl}$ .

$$2 - \operatorname{tg} \psi_j = 0 \text{ avec } \alpha_j r_{kl} \neq 1$$

La vitesse de percussion est toujours identiquement nulle.

6,6 Remarque

La théorie des percussions régulières a été établie à partir de l'hypothèse "*le mouvement est périodique, de période  $\tau$  entre 2 collisions consécutives*". Il est possible de démontrer que la réciproque est vraie, c'est-à-dire que les percussions ne sont régulières que si le temps qui s'écoule entre deux percussions consécutives est une constante, en supposant évidemment la 2<sup>e</sup> condition de régularité des percussions, exprimée au § 6-4, vérifiée.

## CHAPITRE 2

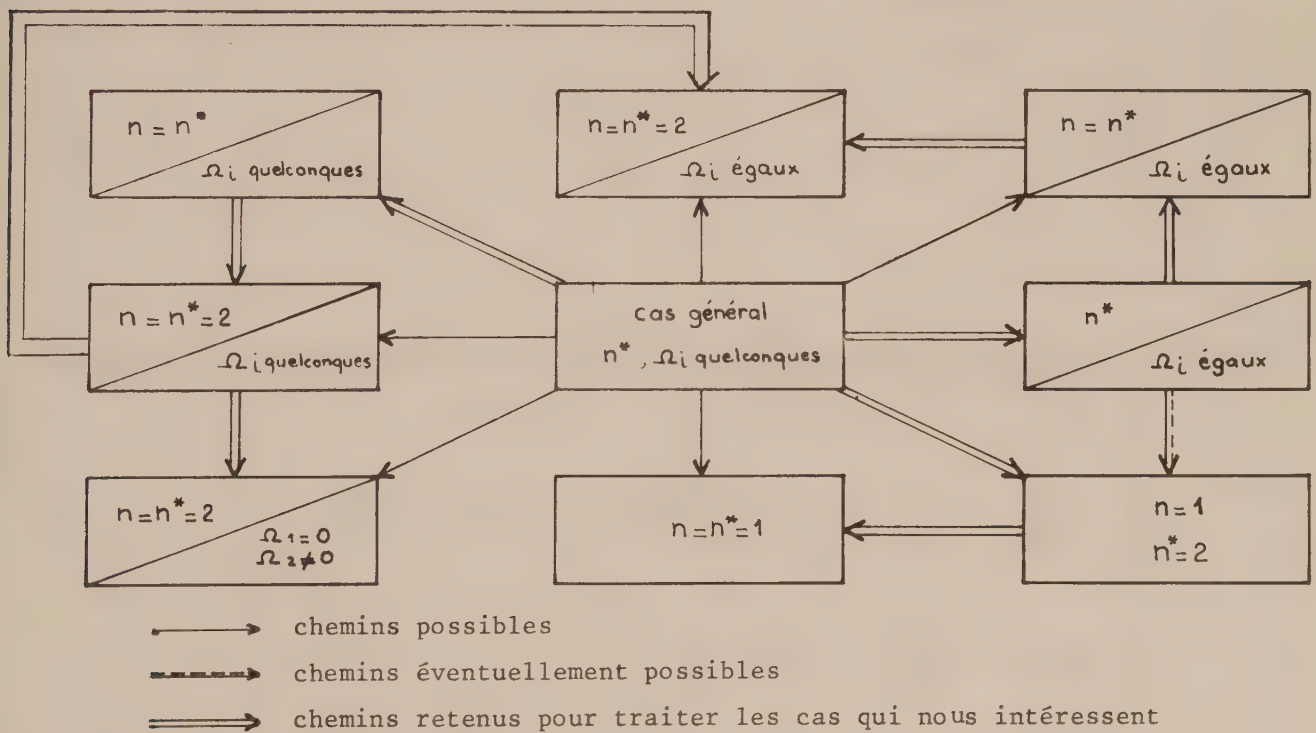
### APPLICATION DE LA THEORIE GENERALE A CERTAINS CAS PARTICULIERS

#### 1 - PRELIMINAIRE -

Nous nous proposons d'étudier les cas suivants :

- $n^*$  degrés de liberté avec  $n$  excitations de même pulsation
- $n = n^*$  degrés de liberté : la butée est fixe, excitations quelconques
- $n = n^*$  degrés de liberté, avec  $n$  excitations de même pulsation
- $n = n^* = 2$  : système à 2 degrés de liberté
- $n = n^* = 2$  : système à 2 degrés de liberté avec pulsations d'excitations égales
- $n = n^* = 2$  : système à 2 degrés de liberté, avec excitation unique sur la masse non percutante
- $n = 1$   $n^* = 2$  : système à 1 degré de liberté, monté sur une butée mobile également à 1 degré de liberté.
- $n = n^* = 1$  : système à 1 degré de liberté monté sur butée fixe.

A partir du cas général nous voyons sur le schéma ci-après, les différents cheminements possibles pour traiter tel ou tel cas suivant ceux résolus précédemment.



N.B. - Il est bien évident que d'autres chemins existent. Notre propos n'est ici que de voir certains aspects de l'application de la théorie générale.

2 - SYSTEME A n\* DEGRES DE LIBERTE AVEC n EXCITATIONS DE MEME PULSATION

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \dots = \Omega_i = \dots = \Omega_k = \dots = \Omega_n = \Omega$$

d'où

$$\left. \begin{aligned} \gamma_i &= \frac{\Omega_i}{\Omega_k} = \frac{N_i}{N_k} = 1 \\ \theta_i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{quel que soit } i \text{ variant de } 1 \text{ à } n$$

Par suite :

$$(2-1) \quad \left\{ \begin{aligned} b_1 &= \frac{r_\ell}{m_1 + m_{n+1}} \sum_{j=1}^{n^*} \frac{(\bar{z}_{j,1} - \bar{z}_{j,n+1})(y_{1,j} m_{n+1} - y_{n+1,j} m_1)}{r_g \psi_j} \alpha_j & r_\ell = \frac{\Omega}{\omega_\ell} \\ b_2 &= \sum_{i=1}^n (a_{i,1}^i - a_{i,n+1}^i) E_i \\ b_3 &= 0 \\ b_4 &= 0 \\ b_5 &= b_2 \end{aligned} \right.$$

Posons

$$\chi_1 = \frac{\xi_1}{b_2}$$

$$\chi_2 = \frac{\xi_2}{b_2}$$

Nous obtenons :

$$(2-2) \quad \left\{ \begin{aligned} \chi_1 &= -\frac{(1-R)}{2} \\ \chi_2 &= \frac{1+R}{2} b_1 \end{aligned} \right.$$

$$(2-3) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{x'(\tau^-)}{x(0)\omega_\ell} &= r_\ell \frac{\chi_2 + \varepsilon \sqrt{\left[\frac{b_1}{x(0)}\right]^2 [\chi_1^2 + \chi_2^2] - \chi_1^2}}{\chi_1^2 + \chi_2^2} \\ \frac{A_j}{x(0)} &= \frac{1+R}{2} \frac{y_{1,j} m_{n+1} - y_{n+1,j} m_1}{m_1 + m_{n+1}} \frac{1}{\sin \psi_j} \frac{x'(\tau^-)}{x(0)\omega_\ell} \alpha_j \\ \sin \varphi_k &= \frac{x(0)}{b_2} \left[ \chi_1 \frac{x'(\tau^-)}{x(0)\omega_\ell} \frac{1}{r_\ell} - 1 \right] \end{aligned} \right.$$

### 3 - SYSTEME A n = n\* DEGRES DE LIBERTE (BUTEE FIXE) n EXCITATIONS QUELCONQUES

Nous devons considérer que  $\begin{cases} m_{n+1} \text{ est infinie} \\ a_{i,n+1}^i \equiv 0 \end{cases}$

Ainsi :

$$(3-1) \quad \begin{cases} b_1 = r_{k\ell} \sum_{i=1}^{n*} \frac{z_{j,l} y_{l,j}}{\operatorname{tg} \psi_j} \alpha_j \\ b_2 = \sum_{i=1}^n a_{i,1}^i E_i \cos \theta_i \\ b_3 = \sum_{i=1}^n a_{i,1}^i E_i \sin \theta_i \\ b_4 = \sum_{i=1}^n a_{i,1}^i E_i \gamma_i \sin \theta_i \\ b_5 = \sum_{i=1}^n a_{i,1}^i E_i \gamma_i \cos \theta_i \end{cases}$$

Les résultats sont donnés par les formules de la théorie générale, les expressions de  $\xi_1$  et  $\xi_2$  restant inchangées :

$$(3-2) \quad \begin{cases} \frac{x'(\tau^-)}{x(0)\omega_\ell} : \text{ Cf (1-6-10)} \\ \frac{A_j}{x(0)} = \frac{1+R}{2} \frac{y_{l,j}}{\sin \psi_j} \frac{x'(\tau^-)}{x(0)\omega_\ell} \alpha_j \\ \sin \phi_k : \text{ Cf (1-6-12)} \end{cases}$$

### 4 - SYSTEME A n = n\* DEGRES DE LIBERTE (BUTEE FIXE) n EXCITATIONS DE MEME PULSATION

A partir du § 2, en faisant  $\begin{cases} m_{n+1} \text{ infinie} \\ a_{i,n+1}^i \equiv 0 \end{cases}$

il vient :

$$(4-1) \quad \begin{cases} b_1 = r_{k\ell} \sum_{j=1}^{n*} \frac{z_{j,l} y_{l,j}}{\operatorname{tg} \psi_j} \alpha_j \\ b_2 = \sum_{i=1}^n a_{i,1}^i E_i \\ b_3 = 0 \\ b_4 = 0 \\ b_5 = b_2 \end{cases}$$

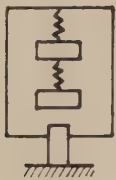
(4-2)

$$\left\| \begin{aligned} \chi_1 &= -\frac{(1-R)}{2} \\ \chi_2 &= \frac{1+R}{2} b_1 \end{aligned} \right.$$

(4-3)

$$\left\| \begin{aligned} \frac{x'(\tau^-)}{x(o)\omega_\ell} &= \quad \quad \quad (2-2-3) \\ \frac{A_j}{x(o)} &= \frac{1+R}{2} \frac{y_{1,j}}{\sin \psi_j} \frac{x'(\tau^-)}{x(o)\omega_\ell} \alpha_j \\ \sin \phi_k &= \quad \quad \quad cf \quad (2-2-3) \end{aligned} \right.$$

### 5 - SYSTEME A $n = n^* = 2$ - EXCITATIONS DIFFERENTES (BUTE **E** FIXE)



$$\rightarrow E_2 \cos(n_2 t + \varphi_2)$$

$$\rightarrow E_1 \cos(n_1 t + \varphi_1)$$

Nous prendrons la deuxième excitation comme référence ( $k = 2$ ) et la première pulsation propre :  $\omega_1$

Calcul de  $b_1$

Pour  $n = n^* = 2$  les matrices  $Z$  et  $Z^{-1}$  sont :

$$Z = \begin{vmatrix} z_{11} & z_{21} \\ z_{12} & z_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ z_{12} & z_{22} \end{vmatrix} \quad Z^{-1} = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{21} \\ y_{12} & y_{22} \end{vmatrix} = \frac{1}{z_{22} - z_{12}} \begin{vmatrix} z_{22} & -1 \\ -z_{12} & 1 \end{vmatrix}$$

Posons :

$$r_1 = r_{2,1} = \frac{\Omega_2}{\omega_1} \quad r_{0,1} = \frac{\Omega_2}{\omega_{0,1}} \quad \text{avec } \omega_{0,1} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$$

$$r_2 = r_{2,2} = \frac{\Omega_2}{\omega_2} \quad r_{0,2} = \frac{\Omega_2}{\omega_{0,2}} \quad \text{avec } \omega_{0,2} = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$$

$$\text{Ainsi : } z_{1,1} = 1 \quad y_{1,1} = -\frac{r_{0,2}^2 - r_1^2}{r_1^2 - r_2^2}$$

$$z_{2,1} = 1 \quad y_{1,2} = \frac{r_{0,2}^2 - r_2^2}{r_1^2 - r_2^2}$$

En remarquant que  $\alpha_1 = \frac{\omega_1}{\omega_1} = 1$   $\alpha_2 = \alpha = \frac{\omega_1}{\omega_2}$  et en appliquant les résultats du § 3, il vient :

$$(5-1) \left\| b_1 = r_1 \sum_{j=1}^2 \frac{z_{j,1} y_{1,j}}{\operatorname{tg} \psi_j} \alpha_j = \frac{r_1}{r_1^2 - r_2^2} \left[ \frac{r_{0,2}^2 - r_2^2}{\operatorname{tg} \psi_2} \alpha - \frac{r_{0,2}^2 - r_1^2}{\operatorname{tg} \psi_1} \right] \right.$$

Calcul de  $b_2, b_3, b_4, b_5$

Posons  $\Theta_1 = \phi_1 - \phi_2 = \Theta$

$$\Theta_2 = \phi_2 - \phi_2 = 0$$

$$\gamma_1 = \frac{\Omega_1}{\Omega_2} = \gamma$$

$$\gamma_2 = \frac{\Omega_2}{\Omega_2} = 1$$

. Le terme  $a_{11}^1$  nous est donné pour l'inverse de la matrice

$$\begin{vmatrix} k_1 - \Omega_1^2 m_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 - \Omega_1^2 m_2 \end{vmatrix}$$

d'où :

$$a_{1,1}^1 = \frac{k_1 + k_2 - \Omega_1^2 m_2}{m_1 m_2 (\omega_1^2 - \Omega_1^2)(\omega_2^2 - \Omega_1^2)} = \frac{k_1 (1 + \frac{k_2}{k_1} - \gamma^2 \frac{r_1^2 r_2^2}{r_1^2 + r_2^2 - r_{01}^2 - r_{02}^2})}{k_2 (1 - \gamma^2 r_1^2)(1 - \gamma^2 r_2^2)}$$

or les pulsations propres d'un tel système sont :

$$(5-2) \quad \omega_j^2 = \frac{m_2 k_1 + m_1 (k_1 + k_2) \mp \sqrt{[k_1 m_2 + m_1 (k_1 + k_2)]^2 - 4 m_1 m_2 k_1 k_2}}{2 m_1 m_2}$$

avec  $j = 1, 2$

Nous en déduisons que  $\frac{k_1}{k_2} = \frac{r_1^2 + r_2^2 - r_{01}^2 - r_{02}^2}{r_{01}^2}$

$$\text{ainsi : } a_{1,1}^1 = \frac{1 + \frac{r_{01}^2 - \gamma^2 r_1^2 r_2^2}{r_1^2 + r_2^2 - r_{01}^2 - r_{02}^2}}{(1 - \gamma^2 r_1^2)(1 - \gamma^2 r_2^2)} \frac{1}{k_2}$$

. Le terme  $a_{2,1}^2$  se déduit de l'inverse de la matrice

$$\begin{vmatrix} k_1 - \Omega_2^2 m_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 - \Omega_2^2 m_2 \end{vmatrix}$$

c'est-à-dire :

$$a_{2,1}^2 = \frac{k_1}{m_1 m_2 (\omega_1^2 - \Omega_2^2)(\omega_2^2 - \Omega_2^2)} = \frac{1}{(1 - r_1^2)(1 - r_2^2)} \frac{1}{k_2}$$

. En posant  $d_1 = \frac{E_1}{k_2}$  ;  $d_2 = \frac{E_2}{k_2}$  nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 b_2 &= a_{1,1}^1 E_1 \cos \theta + a_{2,1}^2 E_2 = \frac{1 + \frac{r_{01}^2 - \gamma^2 r_1^2 r_2^2}{r_1^2 + r_2^2 - r_{01}^2 - r_{02}^2}}{(1 - \gamma^2 r_1^2)(1 - \gamma^2 r_2^2)} d_1 \cos \theta + \frac{d_2}{(1 - r_1^2)(1 - r_2^2)} \\
 b_3 &= a_{1,1}^1 E_1 \sin \theta = \frac{1 + \frac{r_{01}^2 - \gamma^2 r_1^2 r_2^2}{r_1^2 + r_2^2 - r_{01}^2 - r_{02}^2}}{(1 - \gamma^2 r_1^2)(1 - \gamma^2 r_2^2)} d_1 \sin \theta \\
 b_4 &= a_{1,1}^1 E_1 \gamma \sin \theta = \frac{1 + \frac{r_{01}^2 - \gamma^2 r_1^2 r_2^2}{r_1^2 + r_2^2 - r_{01}^2 - r_{02}^2}}{(1 - \gamma^2 r_1^2)(1 - \gamma^2 r_2^2)} d_1 \gamma \sin \theta \\
 b_5 &= a_{1,1}^1 E_1 \gamma \cos \theta + a_{2,1}^2 E_2 = \frac{1 + \frac{r_{01}^2 - \gamma^2 r_1^2 r_2^2}{r_1^2 + r_2^2 - r_{01}^2 - r_{02}^2}}{(1 - \gamma^2 r_1^2)(1 - \gamma^2 r_2^2)} d_1 \gamma \cos \theta + \frac{d_2}{(1 - r_1^2)(1 - r_2^2)}
 \end{aligned}$$

Les résultats sont ceux du § 3 ( [3-2] )

#### 6 - SYSTEME A $n = n^* = 2$ EXCITATIONS DE MEME PULSATION



$$\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega \quad \theta = 0 \quad \gamma = 1$$

des § 4 et 5 nous déduisons :

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{r_1}{r_1^2 - r_2^2} \left[ \frac{r_{02}^2 - r_2^2}{\lg \psi_2} \alpha - \frac{r_{02}^2 - r_1^2}{\lg \psi_1} \right] \\
 (6-1) \quad b_2 &= \frac{1 + \frac{r_{01}^2 - r_1^2 r_2^2}{r_1^2 + r_2^2 - r_{01}^2 - r_{02}^2}}{(1 - r_1^2)(1 - r_2^2)} d_1 + \frac{d_2}{(1 - r_1^2)(1 - r_2^2)} \\
 b_3 &= 0 \\
 b_4 &= 0 \\
 b_5 &= b_2
 \end{aligned}$$

Les résultats sont donnés par les formules (4-2) et (4-3)

#### 7 - SYSTEME A $n = n^* = 2$ $\Omega_1 = 0$ $\Omega_2 \neq 0$



$$\Omega_1 = 0 \quad \Omega_2 = \Omega \neq 0$$

$$\Rightarrow d_1 = 0 \quad (\text{pas d'excitation sur } m_1)$$

$$d_2 = d = \frac{E}{k_2}$$

$$b_1 = \frac{r_1}{r_1^2 - r_2^2} \left[ \frac{r_{o2}^2 - r_2^2}{\operatorname{tg} \psi_2} \alpha - \frac{r_{o2}^2 - r_1^2}{\operatorname{tg} \psi_1} \right]$$

$$b_2 = \frac{d_2}{(1-r_1^2)(1-r_2^2)}$$

$$b_3 = b_4 = 0$$

$$b_5 = b_2$$

Posons

$$\beta = \frac{r_{o2}}{r_1} = \frac{\omega_1}{\omega_{o2}}$$

$$\text{or } \alpha = \frac{\omega_1}{\omega_2} \text{ par définition, donc } \alpha = \frac{r_2}{r_1}$$

D'après les expressions de  $\omega_1$  et  $\omega_2$  (cf [5-2])  $\omega_1 < \omega_2$ , par suite

$$\omega_1 < \omega_{o1} < \omega_2 \text{ et}$$

(7-1)

$$\begin{array}{cc} 0 < \alpha < 1 & \alpha < \beta < 1 \\ \alpha = \frac{r_2}{r_1} & \beta = \frac{r_{o2}}{r_1} \end{array}$$

Les résultats sont alors

(7-2)

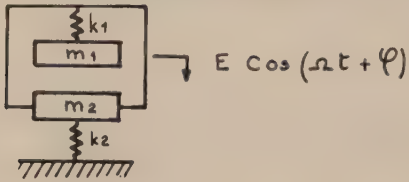
$$\begin{aligned} \frac{x'(\tau)}{\omega_1 x(o)} &= \frac{2 \left\{ \xi + \varepsilon \sqrt{\left[ \frac{d/x(o)}{(1-r_1^2)(1-\alpha^2 r_1^2)} \right]^2 \left[ \left( \frac{1-R}{r_1} \right)^2 + \xi^2 \right] - \left( \frac{1-R}{r_1} \right)^2} \right\}}{\left( \frac{1-R}{r_1} \right)^2 + \xi^2} \\ \frac{A_1}{x(o)} &= \frac{1-\beta^2}{1-\alpha^2} \frac{1+R}{2} \frac{1}{\sin \psi_1} \frac{x'(\tau)}{\omega_1 x(o)} \\ \frac{A_2}{x(o)} &= \alpha \frac{\beta^2 - \alpha^2}{1-\alpha^2} \frac{1+R}{2} \frac{1}{\sin \psi_2} \frac{x'(\tau)}{\omega_1 x(o)} \\ \sin \varphi &= - \frac{(1-r_1^2)(1-\alpha^2 r_1^2)}{r_1} \frac{x(o)}{d} \frac{1-R}{2} \frac{x'(\tau)}{\omega_1 x(o)} \end{aligned}$$

(7-3)

avec

$$\xi = \frac{1+R}{1-\alpha^2} \left[ \frac{\alpha(\beta^2 - \alpha^2)}{\operatorname{tg} \psi_2} + \frac{1-\beta^2}{\operatorname{tg} \psi_1} \right]$$

. Ce système est du type vibropercuteur à 2 degrés de liberté

8 - SYSTEME A  $n = 1, n^* = 2$ 

$$\Omega_1 = \Omega$$

$$E_1 = E$$

$$\phi_1 = \phi$$

Calcul de  $b_1$ 

Les matrices des  $Z$  et  $Z^{-1}$  sont celles exprimées au § 5. En prenant les mêmes notations il vient :

$$z_{1,1} = 1$$

$$z_{1,2} = 1 - \frac{r_{0,1}^2}{r_1^2}$$

$$z_{2,1} = 1$$

$$z_{2,2} = 1 - \frac{r_{0,2}^2}{r_2^2}$$

$$y_{1,1} = -\frac{r_{0,2}^2 - r_1^2}{r_1^2 - r_2^2}$$

$$y_{1,2} = \frac{r_{0,2}^2 - r_2^2}{r_1^2 - r_2^2}$$

$$y_{2,1} = \frac{r_{0,2}^2}{r_1^2 - r_2^2}$$

$$y_{2,2} = \frac{-r_{0,2}^2}{r_1^2 - r_2^2}$$

$$b_1 = \frac{r_1}{m_1 + m_{n+1}} \sum_{j=1}^2 \frac{(z_{j,1} - z_{j,n+1})(y_{1,j} m_{n+1} - y_{n+1,j} m_1)}{\lg \psi_j} \alpha_j \quad \begin{matrix} n+1 = 2 \\ \alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = \alpha = \frac{r_2}{r_1} \end{matrix}$$

$$b_1 = \frac{r_1}{m_1 + m_2} \left[ \frac{(z_{1,1} - z_{1,2})(y_{1,1} m_2 - y_{2,1} m_1)}{\lg \psi_1} + \frac{(z_{2,1} - z_{2,2})(y_{1,2} m_2 - y_{2,2} m_1)}{\lg \psi_2} \alpha \right]$$

$$b_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{r_1}{r_1^2 - r_2^2} \frac{1}{\lg \psi_1} \frac{r_{0,1}^2}{r_1^2} [r_{0,2}^2 - r_1^2 + r_{0,2}^2 \frac{m_1}{m_2}]$$

$$+ \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{r_2}{r_1^2 - r_2^2} \frac{1}{\lg \psi_2} \frac{r_{0,1}^2}{r_2^2} [r_{0,2}^2 - r_2^2 + r_{0,2}^2 \frac{m_1}{m_2}]$$

$$\text{or} \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{k_1}{k_2} \frac{\omega_{0,2}^2}{\omega_{0,1}^2} = \frac{r_1^2 + r_2^2 - r_{0,1}^2 - r_{0,2}^2}{r_{0,2}^2}$$

$$\text{car} \quad \frac{k_1}{k_2} = \frac{r_1^2 + r_2^2 - r_{0,1}^2 - r_{0,2}^2}{r_{0,1}^2} \quad \text{d'après le § 5}$$

Par suite, en posant

$$\alpha = \frac{r_2}{r_1} \quad \beta = \frac{r_{0,1}}{r_1} \Rightarrow \frac{r_{0,2}}{r_1} = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$0 < \alpha < 1 \quad 0 < \alpha < \beta < 1$$

(8-1)

$$b_1 = \frac{\alpha r_1}{1-\alpha^2} \frac{1-\beta^2}{1+\alpha^2-\beta^2} \frac{1}{\operatorname{tg} \psi_2} - \frac{\alpha^2 r_1}{1-\alpha^2} \frac{\alpha^2-\beta^2}{1+\alpha^2-\beta^2} \frac{1}{\operatorname{tg} \psi_1}$$

. Calcul de  $b_2, b_3, b_4, b_5$

Remarquons que  $\theta = 0 = \phi_1 - \phi_1$   $\gamma = \frac{\Omega}{\Omega_1} = 1$

D'où :

$$b_2 = (a_{1,1}^1 - a_{1,2}^1) E$$

$$b_3 = 0$$

$$b_4 = 0$$

$$b_5 = (a_{1,1}^1 - a_{1,2}^1) E = b_2$$

$a_{11}^1$  et  $a_{12}^1$  sont calculés à partir de l'inverse de la matrice :

$$\begin{vmatrix} k_1 - \Omega^2 m_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 - \Omega^2 m_2 \end{vmatrix}$$

Soit :

$$a_{1,1}^1 - a_{1,2}^1 = \frac{k_2 - \Omega^2 m_2}{m_1 m_2 (\omega_1^2 - \Omega^2)(\omega_2^2 - \Omega^2)} = \frac{1 - r_{02}^2}{(1 - r_1^2)(1 - r_2^2)} \frac{1}{k_1}$$

$$\text{d'où } b_2 = \frac{1 - r_{02}^2}{(1 - r_1^2)(1 - r_2^2)} d \quad \text{avec } d = \frac{E}{k_1}$$

Nous exprimerons les résultats sous la forme :

(8-2)

$$\frac{x'(\tau^-)}{\omega_1 x(0)} = \frac{\chi_1 + E \sqrt{(B \frac{d}{x(0)})^2 (\chi_1^2 + \chi_2^2) - \chi_2^2}}{\chi_1^2 + \chi_2^2}$$

$$\frac{A_1}{x(0)} = \frac{1+R}{2} \frac{1}{\sin \psi_1} \frac{\alpha^2}{\beta^2(1-\alpha^2)} \frac{\beta^2-\alpha^2}{1+\alpha^2-\beta^2} \frac{x'(\tau^-)}{\omega_1 x(0)}$$

$$\frac{A_2}{x(0)} = \frac{1+R}{2} \frac{1}{\sin \psi_2} \frac{\alpha^2}{\beta^2(1-\alpha^2)} \frac{1-\beta^2}{1+\alpha^2-\beta^2} \frac{x'(\tau^-)}{\omega_1 x(0)}$$

$$\sin \varphi = \frac{\chi_2}{B} \frac{x(0)}{d} \frac{x'(\tau^-)}{\omega_1 x(0)}$$

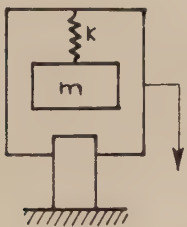
avec 
$$X_1 = \frac{1+R}{2} \frac{1}{1-\alpha^2} \left[ \frac{\alpha(1-\beta^2)}{1+\alpha^2-\beta^2} \frac{1}{\operatorname{tg} \psi_2} + \frac{\alpha^2(\beta^2-\alpha^2)}{1+\alpha^2-\beta^2} \frac{1}{\operatorname{tg} \psi_1} \right]$$

(8-3)

$$\left\{ \begin{aligned} X_2 &= -\frac{1-R}{2r_1} \\ B &= \frac{\beta^2 - \alpha^2 r_1^2}{\beta^2(1-r_1^2)(1-\alpha^2 r_1^2)} \end{aligned} \right.$$

. Ce système est du type vibropercuteur à 1 degré de liberté, monté sur une butée mobile également à 1 degré de liberté.

- SYSTEME A  $n = n^* = 1$



C'est le cas limite du précédent quand la raideur du ressort  $k_2$  est infinie.

$$\omega_1 = \omega_{01} = \omega_0 \quad \omega_2 = \infty \implies \alpha = 0 \quad \beta = 1$$

$$r_1 = r \quad \psi_1 = \psi$$

Il vient :

$$\frac{x'(\tau^-)}{\omega_0 x(0)} = \frac{\frac{1+R}{2 \operatorname{tg} \psi} + E \sqrt{\left[ \frac{d/x(0)}{1-r^2} \right]^2 \left[ \left( \frac{1+R}{2 \operatorname{tg} \psi} \right)^2 + \left( \frac{1-R}{2r} \right)^2 \right] - \left( \frac{1-R}{2r} \right)^2}}{\left( \frac{1+R}{2 \operatorname{tg} \psi} \right)^2 + \left( \frac{1-R}{2r} \right)^2}$$

(9-1)

$$\frac{A}{x(0)} = \frac{1+R}{2} \frac{1}{\sin \psi} \frac{x'(\tau^-)}{\omega_0 x(0)}$$

$$\sin \psi = -\frac{1-R}{2} \frac{x(0)}{d} \frac{1-r^2}{r} \frac{x'(\tau^-)}{\omega_0 x(0)}$$

. Ce système est du type vibropercuteur à 1 degré de liberté sur butée fixe.

## CHAPITRE 3

---

### STABILITE DES PERCUSSIONS POUR LES SYSTEMES A 1 ET 2 DEGRES DE LIBERTE SUR BUTEE FIXE

Les percussions régulières pourront exister si les conditions exprimées au chapitre 1 sont vérifiées et seulement si, pour les fréquences d'excitations retenues, le mouvement correspondant est stable.

Pour étudier la stabilité des percussions, nous utiliserons la théorie des perturbations linéaires. J.A. SPARENBERG a résolu le cas particulier du système à 1 degré de liberté avec un coefficient de restitution de vitesse égal à l'unité (chocs parfaits).

Nous nous proposons, pour notre part, d'exposer les généralités sur la stabilité du système à  $n^*$  degrés de liberté et d'explicitier les systèmes à 1 et 2 degrés de liberté sur butées fixes ( $n = n^* = 1$ ,  $n = n^* = 2$  avec excitation sur la masse non percutante).

#### 1 - GENERALITES SUR LA STABILITE DU SYSTEME A $n^*$ DEGRES DE LIBERTE -

La perturbation sera définie par deux paramètres  $\delta_1$  et  $\varepsilon_1$  (quantités infinitésimales) et sera telle qu'au temps  $t = \delta_1$  les masses (1) et  $(n+1)$  reprennent les positions qu'elles occupaient au temps  $t = 0$  mais que, par contre, leurs vitesses soient légèrement modifiées ; les autres masses ne subissent aucune variation : ni en déplacement, ni en vitesse.

$$\text{Ainsi à } t = \delta_1 \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1(\delta_1) = x_1(0) \\ x_{n+1}(\delta_1) = x_{n+1}(0) \\ x'_1(\delta_1) = x'_1(0) + \varepsilon_1 \sum_{i=1}^n \dot{a}_{i,1} E_i \Omega_i^2 \cos \varphi_i \\ x'_{n+1}(\delta_1) = x'_{n+1}(0) + \varepsilon_1 \sum_{i=1}^n \dot{a}_{i,n+1} E_i \Omega_i^2 \cos \varphi_i \end{array} \right.$$

$$\text{par suite} \quad \left\{ \begin{array}{l} x(\delta_1) = x(0) \\ x'(\delta_1) = x'(0) + \varepsilon_1 \sum_{i=1}^n (\dot{a}_{i,1} - \dot{a}_{i,n+1}) E_i \Omega_i^2 \cos \varphi_i \end{array} \right.$$

équations du mouvement avant perturbation

$$x_p = \sum_{j=1}^{n^*} \ddot{z}_{j,p} A_j \cos(\omega_j t + \psi_j) + \sum_{i=1}^n \dot{a}_{i,p} E_i \cos(\Omega_i t + \varphi_i)$$

$$x'_p = - \sum_{j=1}^{n^*} \ddot{z}_{j,p} A_j \omega_j \sin(\omega_j t + \psi_j) - \sum_{i=1}^n \dot{a}_{i,p} E_i \Omega_i \sin(\Omega_i t + \varphi_i)$$

Nous pouvons aussi écrire ces équations sous la forme :

$$x_p = \sum_{j=1}^{n^*} z_{j,p} A_{1,j} \cos \omega_j t + \sum_{j=1}^{n^*} z_{j,p} A_{2,j} \sin \omega_j t + \sum_{i=1}^n d_{i,p}^c E_i \cos(\Omega_i t + \varphi_i)$$

$$x'_p = -\sum_{j=1}^{n^*} z_{j,p} A_{1,j} \omega_j \sin \omega_j t + \sum_{j=1}^{n^*} z_{j,p} A_{2,j} \omega_j \cos \omega_j t - \sum_{i=1}^n d_{i,p}^c E_i \Omega_i \sin(\Omega_i t + \varphi_i)$$

quel que soit  $p$  variant de 1 à  $n^*$

### équations du mouvement après perturbation

Seules les constantes d'intégration  $A_j$ ,  $\psi_j$  ou  $A_{1j}$ ,  $A_{2j}$  sont modifiées. Après perturbation nous noterons les nouvelles constantes  $\overline{A}_{1j}$ ,  $\overline{A}_{2j}$ .

Les équations sont celles du mouvement avant perturbation en remplaçant respectivement  $A_{1j}$  et  $A_{2j}$  par  $\overline{A}_{1j}$  et  $\overline{A}_{2j}$ .

### Détermination des nouvelles constantes

Nous négligerons tous les termes de degré supérieur à 1 en  $\delta_1$  et  $\epsilon_1$ .

$$\underline{p \neq 1, p \neq n+1}$$

Ni le déplacement, ni la vitesse des masses  $p$  (quel que soit  $p$  variant de 2 à  $n^*$  sauf  $p = n+1$ ) n'étant perturbés, nous pouvons écrire :

$$x_p(\delta_1) = \sum_{j=1}^{n^*} z_{j,p} A_j \cos(\omega_j \delta_1 + \psi_j) + \sum_{i=1}^n d_{i,p}^c E_i \cos(\Omega_i \delta_1 + \varphi_i)$$

$$= \sum_{j=1}^{n^*} z_{j,p} \overline{A}_{1,j} \cos \omega_j \delta_1 + \sum_{j=1}^{n^*} z_{j,p} \overline{A}_{2,j} \sin \omega_j \delta_1 + \sum_{i=1}^n d_{i,p}^c E_i \cos(\Omega_i \delta_1 + \varphi_i)$$

$$\text{or } \cos \omega_j \delta_1 = 1$$

$$\sin \omega_j \delta_1 = \omega_j \delta_1$$

$$\cos(\omega_j \delta_1 + \psi_j) = \cos \psi_j - \delta_1 \omega_j \sin \psi_j$$

il vient :

$$\sum_{j=1}^{n^*} z_{j,p} \overline{A}_{1,j} + \delta_1 \sum_{j=1}^{n^*} z_{j,p} \overline{A}_{2,j} \omega_j = \sum_{j=1}^{n^*} z_{j,p} A_j \cos \psi_j - \delta_1 \sum_{j=1}^{n^*} z_{j,p} A_j \omega_j \sin \psi_j \quad (1)$$

De même :

$$\begin{aligned} x'_p(\delta_1) &= - \sum_{j=1}^{n^*} \bar{z}_{j,p} A_j \omega_j \sin(\omega_j \delta_1 + \psi_j) - \sum_{i=1}^n \alpha_{i,p}^i E_i \Omega_i \sin(\Omega_i \delta_1 + \varphi_i) \\ &= - \sum_{j=1}^{n^*} \bar{z}_{j,p} \bar{A}_{1,j} \omega_j \sin \omega_j \delta_1 + \sum_{j=1}^{n^*} \bar{z}_{j,p} \bar{A}_{2,j} \omega_j \cos \omega_j \delta_1 - \sum_{i=1}^n \alpha_{i,p}^i E_i \Omega_i \sin(\Omega_i \delta_1 + \varphi_i) \end{aligned}$$

$$\text{or } \sin(\omega_j \delta_1 + \psi_j) = \sin \psi_j + \omega_j \delta_1 \cos \psi_j$$

d'où :

$$- \delta_1 \sum_{j=1}^{n^*} \bar{z}_{j,p} \bar{A}_{1,j} \omega_j^2 + \sum_{j=1}^{n^*} \bar{z}_{j,p} \bar{A}_{2,j} \omega_j = - \sum_{j=1}^{n^*} \bar{z}_{j,p} A_j \omega_j \sin \psi_j - \delta_1 \sum_{j=1}^{n^*} \bar{z}_{j,p} A_j \omega_j^2 \cos \psi_j \quad (2)$$

P=1

$$x_1(\delta_1) = \sum_{j=1}^{n^*} \bar{z}_{j,1} \bar{A}_{1,j} + \delta_1 \sum_{j=1}^{n^*} \bar{z}_{j,1} \bar{A}_{2,j} \omega_j + \sum_{i=1}^n \alpha_{i,1}^i E_i \cos(\Omega_i \delta_1 + \varphi_i)$$

$$x_1(0) = \sum_{j=1}^{n^*} \bar{z}_{j,1} A_j \cos \psi_j + \sum_{i=1}^n \alpha_{i,1}^i E_i \cos \varphi_i$$

$$\text{or } \cos(\Omega_i \delta_1 + \varphi_i) = \cos \varphi_i - \Omega_i \delta_1 \sin \varphi_i$$

$$\text{d'où, comme } x_1(\delta_1) = x_1(0)$$

$$\sum_{j=1}^{n^*} \bar{z}_{j,1} \bar{A}_{1,j} + \delta_1 \sum_{j=1}^{n^*} \bar{z}_{j,1} \bar{A}_{2,j} \omega_j = \sum_{j=1}^{n^*} \bar{z}_{j,1} A_j \cos \psi_j + \delta_1 \sum_{i=1}^n \alpha_{i,1}^i E_i \Omega_i \sin \varphi_i \quad (3)$$

$$x'_1(\delta_1) = - \delta_1 \sum_{j=1}^{n^*} \bar{z}_{j,1} \bar{A}_{1,j} \omega_j^2 + \sum_{j=1}^{n^*} \bar{z}_{j,1} \bar{A}_{2,j} \omega_j - \sum_{i=1}^n \alpha_{i,1}^i E_i \Omega_i \sin(\Omega_i \delta_1 + \varphi_i)$$

$$x'_1(0) = - \sum_{j=1}^{n^*} \bar{z}_{j,1} A_j \omega_j \sin \psi_j - \sum_{i=1}^n \alpha_{i,1}^i E_i \Omega_i \sin \varphi_i$$

$$\text{or } \sin(\Omega_i \delta_1 + \varphi_i) = - \sin \varphi_i + \Omega_i \delta_1 \cos \varphi_i$$

$$\text{d'où, comme } x'_1(\delta_1) = x'_1(0) + \varepsilon_1 \sum_{i=1}^n \alpha_{i,1}^i E_i \Omega_i^2 \cos \varphi_i$$

$$- \delta_1 \sum_{j=1}^{n^*} \bar{z}_{j,1} \bar{A}_{1,j} \omega_j^2 + \sum_{j=1}^{n^*} \bar{z}_{j,1} \bar{A}_{2,j} \omega_j = - \sum_{j=1}^{n^*} \bar{z}_{j,1} A_j \omega_j \sin \psi_j + (\delta_1 + \varepsilon_1) \sum_{i=1}^n \alpha_{i,1}^i E_i \Omega_i^2 \cos \varphi_i \quad (4)$$

$p = n+1$

D'une façon analogue au cas  $p = 1$  nous obtenons :

$$\sum_{j=1}^{n^*} \bar{z}_{j,n+1} \bar{A}_{1,j} + \delta_1 \sum_{j=1}^{n^*} \bar{z}_{j,n+1} \bar{A}_{2,j} \omega_j = \sum_{j=1}^{n^*} \bar{z}_{j,n+1} A_j \cos \psi_j + \delta_1 \sum_{i=1}^n a_{i,n+1}^i E_i \Omega_i \sin \varphi_i \quad (5)$$

$$-\delta_1 \sum_{j=1}^{n^*} \bar{z}_{j,n+1} \bar{A}_{1,j} \omega_j^2 + \sum_{j=1}^{n^*} \bar{z}_{j,n+1} \bar{A}_{2,j} \omega_j = -\sum_{j=1}^{n^*} \bar{z}_{j,n+1} A_j \omega_j \sin \psi_j + (\delta_1 + \varepsilon_1) \sum_{i=1}^n a_{i,n+1}^i E_i \Omega_i^2 \cos \varphi_i \quad (6)$$

Les relations (1) à (6) représentent un système de  $2 n^*$  équations à  $2 n^*$  inconnues. La résolution de ce système permet de connaître les constantes  $\bar{A}_{1j}$  et  $\bar{A}_{2j}$  quel que soit  $j$  variant de 1 à  $n^*$ .

### Conséquences de la perturbation sur les percussions successives

La percussion suivant la perturbation se produira au temps  $t = \tau + \delta_2$ ,  $\tau$  étant la période initiale des percussions régulières. Elle sera telle que :

$$x(\tau + \delta_2) = x(0)$$

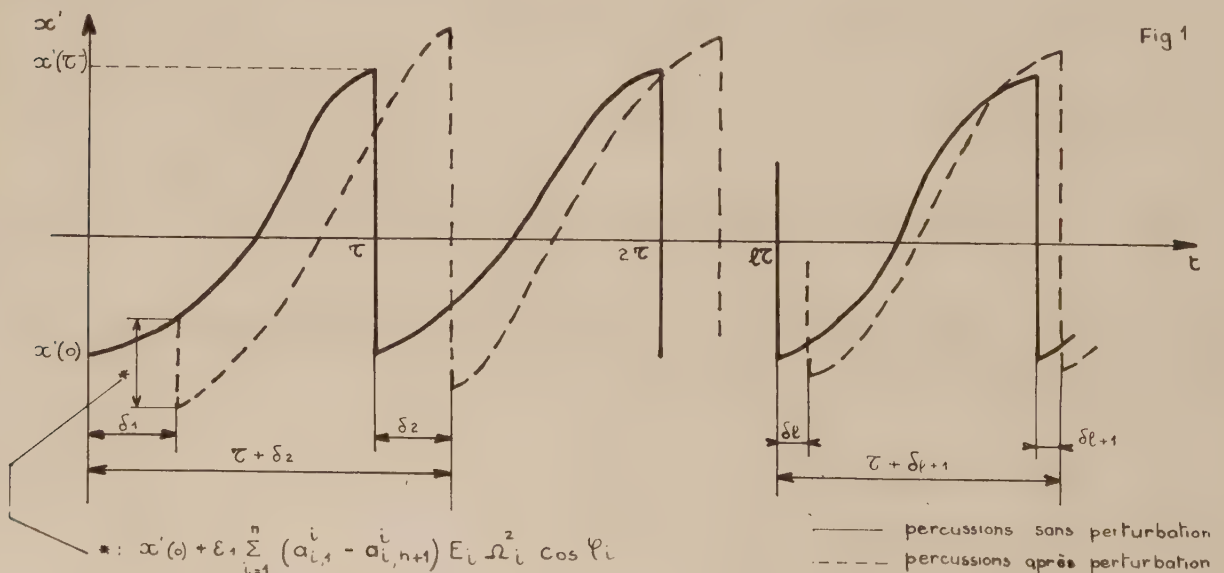
$$x'(\tau + \delta_2) = x'(\tau) - \frac{\varepsilon_2}{R} \sum_{i=1}^n (a_{i,1}^i - a_{i,n+1}^i) E_i \Omega_i^2 \cos \varphi_i$$

par suite

$$x'(\tau + \delta_2) = x'(0) + \varepsilon_2 \sum_{i=1}^n (a_{i,1}^i - a_{i,n+1}^i) E_i \Omega_i^2 \cos \varphi_i$$

et ainsi de suite

Pour étudier la stabilité nous relierons les paramètres initiaux de la perturbation ( $\varepsilon_1, \delta_1$ ) et ceux des conséquences de cette perturbation sur la  $(l+1)$ ème percussion ( $\varepsilon_l, \delta_l$ ) (Fig. 1). Si  $\varepsilon_l$  et  $\delta_l$  restent finis quel que soit  $l$ , le système sera stable.



2 - STABILITE DU SYSTEME A 2 DEGRES DE LIBERTE, SUR BUTEE FIXE, POSSEDANT UNE SEULE EXCITATION PLACEE SUR LA MASSE NON PERCUTANTE -

Les formules de base ont été établies à partir de la théorie générale au chapitre 2 - § 7.

Ainsi :

$$n=n^*=2 \quad \bar{z}_{1,1} = \bar{z}_{2,1} = 1 \quad \Omega_1 = 0 \quad \Omega_2 = \Omega \quad E_1 = 0 \quad E_2 = E$$

$$d_2 = \frac{E}{\kappa_2} = d \quad \alpha_{2,p}^2 E = \frac{d}{(1-r_1^2)(1-r_2^2)}$$

$$\alpha = \frac{r_2}{r_1} \quad \beta = \frac{r_{0,2}}{r_1}$$

Les relations (1) à (6) s'écrivent :

$$\bar{z}_{1,2} \bar{A}_{1,1} + \bar{z}_{2,2} \bar{A}_{1,2} + \delta_1 \bar{z}_{1,2} \bar{A}_{2,1} \omega_1 + \delta_1 \bar{z}_{2,2} \bar{A}_{2,2} \omega_2$$

$$= \bar{z}_{1,2} A_1 \cos \psi_1 + \bar{z}_{2,2} A_2 \cos \psi_2 - \delta_1 \bar{z}_{1,2} A_1 \omega_1 \sin \psi_1 - \delta_1 \bar{z}_{2,2} A_2 \omega_2 \sin \psi_2$$

$$\bar{A}_{1,1} + \bar{A}_{1,2} + \delta_1 \bar{A}_{2,1} \omega_1 + \delta_1 \bar{A}_{2,2} \omega_2 = A_1 \cos \psi_1 + A_2 \cos \psi_2 + \delta_1 \alpha_{2,1}^2 E \Omega \sin \varphi$$

$$-\delta_1 \bar{z}_{1,2} \bar{A}_{1,1} \omega_1^2 - \delta_1 \bar{z}_{2,2} \bar{A}_{1,2} \omega_2^2 + \bar{z}_{1,2} \bar{A}_{2,1} \omega_1 + \bar{z}_{2,2} \bar{A}_{2,2} \omega_2$$

$$= -\bar{z}_{1,2} A_1 \omega_1 \sin \psi_1 - \bar{z}_{2,2} A_2 \omega_2 \sin \psi_2 - \delta_1 \bar{z}_{1,2} A_1 \omega_1^2 \cos \psi_1 - \delta_1 \bar{z}_{2,2} A_2 \omega_2^2 \cos \psi_2$$

$$-\delta_1 \bar{A}_{1,1} \omega_1^2 - \delta_1 \bar{A}_{1,2} \omega_2^2 + \bar{A}_{2,1} \omega_1 + \bar{A}_{2,2} \omega_2 = -A_1 \omega_1 \sin \psi_1 - A_2 \omega_2 \sin \psi_2 + (\delta_1 + \varepsilon_1) \alpha_{2,1}^2 E \Omega^2 \cos \varphi$$

En résolvant ce système, il vient :

$$\begin{aligned}
 \bar{A}_{1,1} &= A_1 \cos \psi_1 - \delta_1 \frac{\bar{z}_{2,2}}{\bar{z}_{2,2} - \bar{z}_{1,2}} x'(0) \\
 \bar{A}_{2,1} &= -A_1 \sin \psi_1 - \delta_1 \frac{\bar{z}_{3,2}}{\bar{z}_{2,2} - \bar{z}_{1,2}} \frac{x''(0)}{\omega_1} + \varepsilon_1 \frac{\bar{z}_{2,2}}{\bar{z}_{2,2} - \bar{z}_{1,2}} \frac{\alpha_{2,1}^2 E \Omega^2 \cos \psi}{\omega_1} \\
 \bar{A}_{1,2} &= A_2 \cos \psi_2 + \delta_1 \frac{\bar{z}_{1,2}}{\bar{z}_{2,2} - \bar{z}_{1,2}} x'(0) \\
 \bar{A}_{2,2} &= -A_2 \sin \psi_2 + \delta_1 \frac{\bar{z}_{1,2}}{\bar{z}_{2,2} - \bar{z}_{1,2}} \frac{x''(0)}{\omega_2} - \varepsilon_1 \frac{\bar{z}_{1,2}}{\bar{z}_{2,2} - \bar{z}_{1,2}} \frac{\alpha_{2,1}^2 E \Omega^2 \cos \psi}{\omega_2}
 \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}
 \frac{\bar{z}_{2,2}}{\bar{z}_{2,2} - \bar{z}_{1,2}} &= \frac{1 - \beta^2}{1 - \alpha^2} \\
 \frac{\bar{z}_{1,2}}{\bar{z}_{2,2} - \bar{z}_{1,2}} &= -\frac{\beta^2 - \alpha^2}{1 - \alpha^2}
 \end{aligned}$$

Remarquons que si  $\delta_1 = \varepsilon_1 = 0$  (pas de perturbation) nous retrouvons bien les constantes initiales d'intégration.

La percussion consécutive à la perturbation se produisant au temps  $t = \tau + \delta_2$ , il vient :

$$x(\tau + \delta_2) = x(0)$$

$$x'(\tau + \delta_2) = x'(\tau^-) - \frac{\varepsilon_2}{R} \alpha_{2,1}^2 E \Omega^2 \cos \psi$$

soit :

$$x(0) = \bar{A}_{1,1} \cos \omega_1(\tau + \delta_2) + \bar{A}_{2,1} \sin \omega_1(\tau + \delta_2) + \bar{A}_{1,2} \cos \omega_2(\tau + \delta_2) + \bar{A}_{2,2} \sin \omega_2(\tau + \delta_2) + \alpha_{2,1}^2 E \cos[-\Omega(\tau + \delta_2) + \psi]$$

or

$$\cos \omega_j(\tau + \delta_2) = \cos 2\psi_j + \delta_2 \omega_j \sin 2\psi_j$$

$$\sin \omega_j(\tau + \delta_2) = -\sin 2\psi_j + \delta_2 \omega_j \cos 2\psi_j$$

$$\cos[-\Omega(\tau + \delta_2) + \psi] = \cos \psi - \delta_2 \Omega \sin \psi$$

En développant la relation précédente, il apparaît que la somme des termes indépendants de  $\varepsilon_1$ ,  $\delta_1$  et  $\delta_2$  est égale à  $x(0)$ . Ainsi  $\delta_2$  peut s'exprimer par une combinaison linéaire de  $\varepsilon_1$  et  $\delta_1$ :

$$\delta_2 = c_1 \delta_1 + c_2 \varepsilon_1$$

En opérant d'une façon analogue avec  $x'(\tau^- + \delta_2) = x'(\tau^-) - \frac{\varepsilon_2}{R} a_{21}^2 E \Omega^2 \cos \phi$   
il vient :

$$\underline{E_2 = C_3 \delta_1 + C_4 \varepsilon_1}$$

avec :

$$C_1 = \frac{\beta^2 - 1}{1 - \alpha^2} \left[ R \cos 2\psi_1 + \frac{x''(0)}{\omega_1^2 x(0)} \frac{\omega_1 x(0)}{x'(\tau^-)} \sin 2\psi_1 \right] - \frac{\beta^2 - \alpha^2}{1 - \alpha^2} \left[ R \cos 2\psi_2 + \alpha \frac{x''(0)}{\omega_1^2 x(0)} \frac{\omega_1 x(0)}{x'(\tau^-)} \sin 2\psi_2 \right]$$

$$C_2 = \frac{\frac{d}{dx}(0) \cdot r_1^2 \cos \psi}{(1 - r_1^2)(1 - \alpha^2 r_1^2)} \frac{\omega_1 x(0)}{x'(\tau^-)} \left[ \frac{1 - \beta^2}{1 - \alpha^2} \sin 2\psi_1 + \alpha \frac{\beta^2 - \alpha^2}{1 - \alpha^2} \sin 2\psi_2 \right]$$

$$C_3 = \frac{R}{\frac{d}{dx}(0) \cdot r_1^2 \cos \psi}{(1 - r_1^2)(1 - \alpha^2 r_1^2)} \left\{ - \frac{x''(0)}{\omega_1 x(0)} C_1 + \frac{1 - \beta^2}{1 - \alpha^2} \frac{x'(\tau^-)}{\omega_1 x(0)} \left[ - R \sin 2\psi_1 + \frac{x''(0)}{\omega_1^2 x(0)} \frac{\omega_1 x(0)}{x'(\tau^-)} \cos 2\psi_1 \right] \right. \\ \left. + \frac{\beta^2 - \alpha^2}{1 - \alpha^2} \frac{x'(\tau^-)}{\omega_1 x(0)} \left[ - \frac{R}{\alpha} \sin 2\psi_2 + \frac{x''(0)}{\omega_1^2 x(0)} \frac{\omega_1 x(0)}{x'(\tau^-)} \cos 2\psi_2 \right] \right\}$$

$$C_4 = \frac{R(\beta^2 - 1)}{1 - \alpha^2} \left[ \cos 2\psi_1 + \frac{x''(0)}{\omega_1^2 x(0)} \frac{\omega_1 x(0)}{x'(\tau^-)} \sin 2\psi_1 \right] - \frac{R(\beta^2 - \alpha^2)}{1 - \alpha^2} \left[ \cos 2\psi_2 + \alpha \frac{x''(0)}{\omega_1^2 x(0)} \frac{\omega_1 x(0)}{x'(\tau^-)} \sin 2\psi_2 \right]$$

où :

$$\frac{x'(\tau^-)}{\omega_1 x(0)} = \frac{A_1}{x(0)} \sin \psi_1 + \frac{1}{\alpha} \frac{A_2}{x(0)} \sin \psi_2 - \frac{\frac{d}{dx}(0) \cdot r_1 \sin \psi}{(1 - r_1^2)(1 - \alpha^2 r_1^2)}$$

$$\frac{x''(0)}{\omega_1^2 x(0)} = - \frac{A_1}{x(0)} \cos \psi_1 - \frac{1}{\alpha^2} \frac{A_2}{x(0)} \cos \psi_2 - \frac{\frac{d}{dx}(0) \cdot r_1^2 \cos \psi}{(1 - r_1^2)(1 - \alpha^2 r_1^2)}$$

$\frac{A_1}{x(0)}$ ,  $\frac{A_2}{x(0)}$  et  $\sin \phi$  sont déterminées par les relations 7,2 du chapitre 2.

Remarquons que :

$$x''(0) = -R x'(\tau^-) = -A_1 \omega_1 \sin \psi_1 - A_2 \omega_2 \sin \psi_2 - \frac{dR \sin \psi}{(1 - r_1^2)(1 - \alpha^2 r_1^2)}$$

$$x'(\tau^-) = A_1 \omega_1 \sin \psi_1 + A_2 \omega_2 \sin \psi_2 - \frac{dR \sin \psi}{(1 - r_1^2)(1 - \alpha^2 r_1^2)}$$

et qu'ainsi :

$$\left\| \frac{1-R}{1+R} = - \frac{\frac{d r_1 \sin \varphi}{(1-r_1^2)(1-\alpha^2 r_1^2)}}{A_1 \sin \psi_1 + \frac{1}{\alpha} A_2 \sin \psi_2} \right. \quad = K = \text{constante pour } R \text{ constant}$$

Il en découle :

$$\frac{x''(0)}{\omega_1^2 x(0)} \frac{\omega_1 x(0)}{x'(\tau^-)} = - \frac{1}{1+K} \left( \eta - \frac{K r_1}{\operatorname{tg} \varphi} \right)$$

$$\frac{1}{\frac{d/x(0) \cdot r_1^2 \cos \varphi}{(1-r_1^2)(1-\alpha^2 r_1^2)}} \frac{x'(\tau^-)}{\omega_1 x(0)} = - \frac{1+K}{K} \frac{\operatorname{tg} \varphi}{r_1}$$

$$\frac{1}{\frac{d/x(0) \cdot r_1^2 \cos \varphi}{(1-r_1^2)(1-\alpha^2 r_1^2)}} \frac{x''(0)}{\omega_1^2 x(0)} = \frac{1}{K} \frac{\operatorname{tg} \varphi}{r_1} - 1$$

avec

$$\eta = \frac{1-\beta^2}{1-\alpha^2} \frac{1}{\operatorname{tg} \psi_1} + \frac{1}{\alpha} \frac{\beta^2-\alpha^2}{1-\alpha^2} \frac{1}{\operatorname{tg} \psi_2}$$

Par suite :

$$C_1 = - \frac{1}{1+K} \left\{ \frac{1-\beta^2}{1-\alpha^2} \left[ (1-K) \cos 2\psi_1 - \left( \eta - \frac{K r_1}{\operatorname{tg} \varphi} \right) \sin 2\psi_1 \right] + \frac{\beta^2-\alpha^2}{1-\alpha^2} \left[ (1-K) \cos 2\psi_2 - \alpha \left( \eta - \frac{K r_1}{\operatorname{tg} \varphi} \right) \sin 2\psi_2 \right] \right\}$$

$$C_2 = - \frac{K}{1+K} \frac{r_1}{\operatorname{tg} \varphi} \left[ \frac{1-\beta^2}{1-\alpha^2} \sin 2\psi_1 + \alpha \frac{\beta^2-\alpha^2}{1-\alpha^2} \sin 2\psi_2 \right]$$

$$C_3 = \frac{1-K}{1+K} \left\{ \left( 1 - \frac{\operatorname{tg} \varphi}{r_1} \right) C_1 + \frac{1-\beta^2}{1-\alpha^2} \frac{\operatorname{tg} \varphi}{K r_1} \left[ (1-K) \sin 2\psi_1 + \left( \eta - \frac{K r_1}{\operatorname{tg} \varphi} \right) \cos 2\psi_1 \right] \right.$$

$$\left. + \frac{\beta^2-\alpha^2}{1-\alpha^2} \frac{\operatorname{tg} \varphi}{K r_1} \left[ \frac{1-K}{\alpha} \sin 2\psi_2 + \left( \eta - \frac{K r_1}{\operatorname{tg} \varphi} \right) \cos 2\psi_2 \right] \right\}$$

$$C_4 = - \frac{1-K}{1+K} \left\{ \frac{1-\beta^2}{1-\alpha^2} \left[ \cos 2\psi_1 - \frac{1}{1+K} \left( \eta - \frac{K r_1}{\operatorname{tg} \varphi} \right) \sin 2\psi_1 \right] + \frac{\beta^2-\alpha^2}{1-\alpha^2} \left[ \cos 2\psi_2 - \frac{\alpha}{1+K} \left( \eta - \frac{K r_1}{\operatorname{tg} \varphi} \right) \sin 2\psi_2 \right] \right\}$$

Translatons l'origine des temps d'une quantité  $\tau$  (cf. Fig. 1). Nous pouvons alors écrire :

$$x(\delta_2) = x(o)$$

$$x'(\delta_2^-) = x'(\tau^-) - \frac{\varepsilon_2}{R} a_{21}^2 E \Omega^2 \cos \phi$$

Après percussion il vient :

$$x(\delta_2) = x(o)$$

$$x'(\delta_2^-) = x'(o) + \varepsilon_2 a_{21}^2 E \Omega^2 \cos \phi$$

Ainsi les nouvelles constantes d'intégration  $\overline{A}_{1j}$ ,  $\overline{A}_{2j}$  sont respectivement égales à  $\overline{A}_{1j}$  et  $\overline{A}_{2j}$  en remplaçant dans ces dernières  $(\varepsilon_1, \delta_1)$  par  $(\varepsilon_2, \delta_2)$ . Nous obtenons :

$$\delta_3 = c_1 \delta_2 + c_2 \varepsilon_2$$

$$\varepsilon_3 = c_3 \delta_2 + c_4 \varepsilon_2$$

D'une façon générale les relations entre les  $\ell$  ième et  $(\ell + 1)$  ième percussions suivant la perturbation s'écrivent :

$$\delta_{\ell+1} = c_1 \delta_\ell + c_2 \varepsilon_\ell$$

$$\varepsilon_{\ell+1} = c_3 \delta_\ell + c_4 \varepsilon_\ell$$

Choisissons un nouveau système de référence ayant pour base les vecteurs propres de la matrice

$$\det \begin{vmatrix} c_1 - \lambda & c_2 \\ c_3 & c_4 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda(c_1 + c_4) + c_1 c_4 - c_2 c_3 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{c_1 + c_4 \pm \sqrt{(c_1 + c_4)^2 - 4(c_1 c_4 - c_2 c_3)}}{2}$$

Dans le cas général les deux valeurs propres sont distinctes, les relations précédentes deviennent :

$$\delta_{\ell+1}^* = \lambda_1 \delta_\ell^* \quad \varepsilon_{\ell+1}^* = \lambda_2 \varepsilon_\ell^*$$

$\delta_\ell^*$ ,  $\varepsilon_\ell^*$  étant des combinaisons linéaires de  $\delta_\ell$  et  $\varepsilon_\ell$ , comme  $\lambda_1$  est différent de  $\lambda_2$ , la matrice de transformation du couple  $(\delta_\ell, \varepsilon_\ell)$  en  $(\delta_\ell^*, \varepsilon_\ell^*)$  a un inverse unique.

Par suite si  $\delta_\ell^*$  et  $\varepsilon_\ell^*$  restent finis quel que soit  $\ell$  le système sera stable, ce qui implique :

$$-1 \leq \lambda_1 \leq 1, \quad -1 \leq \lambda_2 \leq 1$$

soit encore :

$$-1 - (c_1 c_4 - c_2 c_3) \leq c_1 + c_4 \leq 1 + c_1 c_4 - c_2 c_3$$

$$\text{si : } \lambda_1 = \lambda_2 \quad c_1 c_4 - c_2 c_3 = \frac{1}{4} (c_1 + c_4)^2$$

En appliquant la relation de stabilité, il vient :

$$\left[ (c_1 + c_4)^2 \pm 2 \right]^2 \geq 0$$

relation toujours vérifiée, l'égalité se produisant pour  $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$ , le mouvement pourra être instable pour ces dernières valeurs. Pratiquement une discussion mathématique de ces cas ne présente pas d'intérêt notable, car il ne s'agit que de points particuliers et isolés du fonctionnement.

### 3 - STABILITE DU SYSTEME A 1 DEGRE SUR BUTEE FIXE ( $n = n^* = 1$ )

Les relations (3) et (4) deviennent :

$$\bar{A}_1 + \delta_1 \bar{A}_2 \omega_0 = A \cos \psi + \delta_1 \frac{d}{1-r^2} \Omega \sin \psi$$

$$-\delta_1 \bar{A}_1 \omega_0^2 + \bar{A}_2 \omega_0 = -A \omega_0 \sin \psi + (\delta_1 + \varepsilon_1) \frac{d}{1-r^2} \Omega^2 \cos \psi$$

d'où

$$\bar{A}_1 = A \cos \psi - \delta_1 x'(0)$$

$$\bar{A}_2 = -A \sin \psi - \delta_1 \frac{x''(0)}{\omega_0} + \varepsilon_1 \frac{d}{1-r^2} \frac{\Omega^2}{\omega_0} \cos \psi$$

$$\text{Au temps } t = \tau + \delta_2 : \quad x(\tau + \delta_2) = x(0)$$

$$x'(\tau + \delta_2) = x'(\tau) - \frac{\varepsilon_2}{R} \frac{d}{1-r^2} \Omega^2 \cos \psi$$

En remarquant que

$$K = \frac{1-R}{1+R} = \frac{-\frac{d}{1-r^2} r \sin \psi}{\left[ x(0) - \frac{d}{1-r^2} \cos \psi \right] \tan \psi}$$

et, en agissant d'une façon identique à celle développée au paragraphe précédent, nous obtenons :

$$\delta_2 = c_1 \delta_1 + c_2 \varepsilon_1$$

$$\varepsilon_2 = c_3 \delta_1 + c_4 \varepsilon_1$$

avec :

$$c_1 = \frac{1}{1+K} \left[ 1 + K \cos 2\psi - \frac{Kr}{\operatorname{tg} \psi} \sin 2\psi \right]$$

$$c_2 = \frac{-K}{1+K} \frac{r}{\operatorname{tg} \psi} \sin 2\psi$$

$$c_3 = \frac{1-K}{(1+K)^2} \left[ 2 - \frac{K}{r} \operatorname{tg} \psi \sin 2\psi - \frac{Kr}{\operatorname{tg} \psi} \sin 2\psi \right]$$

$$c_4 = \frac{1-K}{(1+K)^2} \left[ 1 - K \cos 2\psi - Kr \frac{\sin 2\psi}{\operatorname{tg} \psi} \right]$$

La condition générale de stabilité est toujours :

$$-1 - (c_1 + c_4) \leq c_1 + c_4 \leq 1 + c_1 c_4 - c_2 c_3$$

qui s'exprime :

$$-1 - K^2 \leq 1 + K^2 \cos 2\psi - \frac{Kr}{\operatorname{tg} \psi} \sin 2\psi \leq 1 + K^2$$

$$\text{Pour } \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{c_1 + c_4}{2} \text{ il vient } -1 - K^2 \leq \pm (1 - K^2) \leq 1 + K^2$$

Le mouvement est stable sauf pour  $K = 0$  c'est-à-dire  $R$  égal à l'unité.

Nous retrouvons bien les résultats exposés de J.A. SPARENBERG pour le système à un degré sur butée fixe et  $R = 1$ .

Remarque :

De la relation de stabilité nous pouvons déduire

$$-\frac{r}{\operatorname{tg} \psi} \sin 2\psi < 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{\varepsilon \sqrt{1 - \sin^2 \psi}}{\sin \psi} \sin 2\psi < 0 \quad \varepsilon = \pm 1$$

ce qui signifie que s'il existe deux valeurs de la vitesse de percussion pour un système donné et réglé ( $r, R, N, \frac{x_0}{D}$  constants) l'une de ces vitesses correspondra à un mouvement instable.

#### 4 - VALIDITE DE LA THEORIE SUR LA STABILITE -

La définition de la perturbation suppose qu'au temps  $t = \delta_1$ , seules les positions et vitesses des masses percutantes sont modifiées.

Cette définition parfaitement exacte pour le système à 1 degré sur butée fixe ne l'est plus pour les systèmes à plusieurs degrés de liberté : les positions des masses

non percutantes subissant elles aussi une légère variation.

Cependant la théorie développée dans ce chapitre pour le système à 2 degrés sur butée fixe permet une approche intéressante des plages de stabilité. Une étude plus complète tiendrait compte d'un terme correctif dû au déplacement de  $m_2$  lors de la perturbation :

soit  $\Delta x_1$  la modification de  $m_1$  lors de l'application de la perturbation et  $\Delta x_2$  celle qui en résulterait sur  $m_2$ .

$$\Delta x_1 = x_1(0) - x_1(\delta_1) = -\delta_1 x'(0)$$

$$\Delta x_2 = \frac{k_1}{k_1 + k_2} \Delta x_1$$

Le terme correctif sur la position de  $m_2$  est ainsi :

$$\Delta x_2 = -\delta_1 \frac{k_1}{k_1 + k_2} x'(0)$$

## CHAPITRE 4

---

### PLAGES DE PERCUSSIONS REGULIERES REELLES POUR UN SYSTEME DONNE

Pour un système donné  $x(0)$ ,  $R$ ,  $a_{i,p}^i$ ,  $E_i$ ,  $\theta_i$ ,  $\gamma_i$ ,  $\alpha_j$  et  $\omega_{0j}$  sont connus et constants quel que soit  $i$ ,  $p$ ,  $j$  variant de 1 à  $n^*$ .

Pratiquement, en opérant un balayage en fréquence, trois sortes de plages sont mises en évidence :

- celle où les percussions ne peuvent exister
- " " " " existent mais sont irrégulières
- " " " " " et sont régulières.

Traçons le graphe de la fonction  $\frac{x'(\tau^-)}{\omega_l x(0)} = f(r_{k,l})$  du système, pour diverses valeurs de  $N$ , en appliquant les conditions d'existence des percussions régulières (Fig. 1). (cf chap. 1)

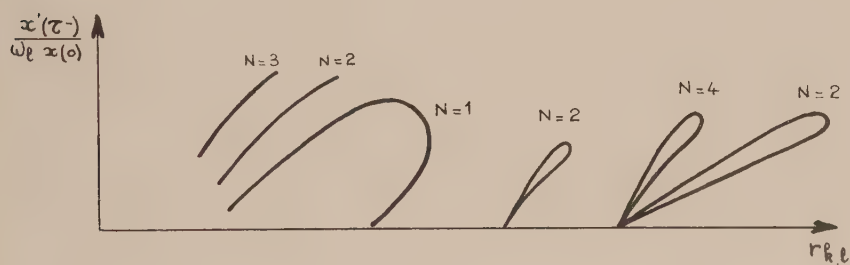


Fig 1

Imposons maintenant les conditions de stabilité (supposées connues), nous obtenons le graphe de la figure 2.

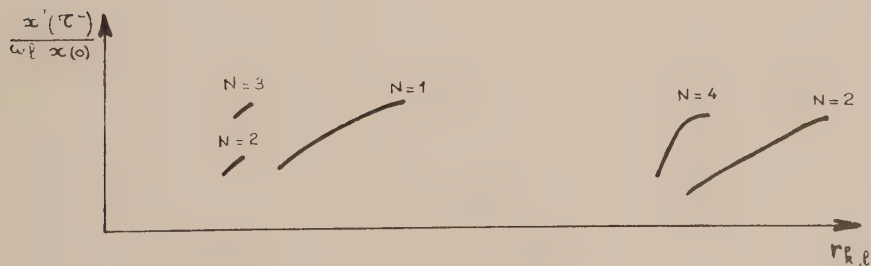


Fig 2

Pour chaque valeur de  $r_{k.\ell}$  où les percussions régulières peuvent exister et être stables, le mouvement réel qui s'établit est celui qui correspond au minimum d'énergie fournie au système pour produire les collisions successives.

Par suite :

- il peut exister des plages de percussions irrégulières alors qu'elles pourraient être théoriquement régulières.

- Si, pour une même valeur de  $r_{k.\ell}$ , plusieurs valeurs de  $N$  sont possibles et que, de plus, les percussions réelles sont régulières, la valeur physique de  $N$  est celle satisfaisant la condition du minimum d'énergie dissipée.

## 2<sup>ème</sup> PARTIE

### Analyse des graphes

$$x^T(\cdot) = f(r_{k,l})$$

$$\text{pour } n = n^* - 1$$

$$n = n^* - 2$$

Application aux vibropercuteurs  
à 1 et 2 degrés de liberté

---



## PRELIMINAIRE

Nous nous proposons dans cette deuxième partie de tracer et d'analyser les variations de la vitesse de percussion en fonction des divers paramètres, pour deux systèmes fort intéressants :

- le vibropercuteur à 1 degré de liberté sur butée fixe :  $n = n^* = 1$ .
- le vibropercuteur à 2 degrés de liberté sur butée fixe ( $n = n^* = 2$ ), à une seule excitation placée sur la masse non percutante.

Les excitations sont du type balourds, c'est-à-dire d'amplitude proportionnelle au carré de la pulsation d'excitation.

$$E = m_b a \Omega^2 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} m_b = \text{masse des balourds} \\ a = \text{excentrement} \\ \Omega = \text{pulsation d'excitation} \end{cases}$$

Ainsi d s'exprime :

- pour le système à 1 degré :

$$d = \frac{E}{k} = \frac{m_b a \Omega^2}{k} = \frac{m_b a \Omega^2}{m \omega_0^2}$$

$$d = D r^2 \quad \text{avec} \quad D = \frac{m_b a}{m}$$

- pour le système à 2 degrés :

$$d = \frac{E}{k_2} = \frac{m_b a \Omega^2}{k_2} = \frac{m_b a}{m_2} \frac{\Omega^2}{\omega_{02}^2}$$

$$d = D \beta^2 r_1^2 \quad \text{avec} \quad D = \frac{m_b a}{m_2}$$

D est une constante pour un système donné.

La vitesse de percussion est présentée sous la forme réduite  $\frac{x'(\tau^-)}{\omega_l D}$ , expression préférable à  $\frac{x'(\tau^-)}{\omega_l x(0)}$ , étant pour un vibropercuteur donné directement proportionnelle à la vitesse réelle de percussion alors que la valeur de l'interstice  $x(0)$  est une variable.

L'influence de chaque paramètre du vibropercuteur sur la vitesse de percussion est déduite du traitement numérique de la fonction:

$\frac{x'(\tau)}{\omega_l D} = f(r_l)$  pour diverses valeurs des autres variables, traitement effectué au Centre de Calcul scientifique de l'E.N.S.M. sur ordinateur I.B.M. 1130.

Dans un premier temps, seules les conditions d'existence des percussions régulières seront retenues puis, dans un second temps, celles de stabilité.

Nous appliquerons enfin les résultats obtenus à la détermination des caractéristiques essentielles de vibropercuteur et notamment à la valeur de l'interstice réel correspondant à la puissance maximale disponible.

## CHAPITRE 1

----

### SYSTEME A 1 DEGRE DE LIBERTE SUR BUTEE FIXE

#### EXCITE PAR BALOURDS

#### 1 - INTRODUCTION -

L'analyse des graphes de la vitesse réduite de percussion  $\frac{x'(\tau^-)}{\omega_0 D}$  en fonction de  $r$  nous permettra de compléter les lois théoriques mises en évidence dans la première partie.

#### 2 - POSITION DU PROBLEME -

. Rappel des définitions des différents paramètres :

$$\frac{x(o)}{D} = \frac{x(o)m}{m_b a}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} x(o) & : \text{interstice réel} \\ m & : \text{masse du percuteur} \\ m_b & : \text{masse des balourds} \\ a & : \text{excentrement des balourds} \end{array} \right.$$

$$R = - \frac{x'(\tau^+)}{x'(\tau^-)}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} R & : \text{coefficient de restitution de vitesse} \\ & 0 \leq R \leq 1 \\ x'(\tau^+) & : \text{vitesse immédiatement après percussion} \\ x'(\tau^-)' & : \text{vitesse de percussion} \end{array} \right.$$

$$N$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{nombre de cycles entiers décrits par l'excitation entre} \\ \text{deux percussions consécutives (1ère condition de régularité des percussions).} \end{array} \right.$$

$$r = \frac{\Omega}{\omega_0}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Omega & : \text{pulsation d'excitation} \\ \omega_0 & : \text{" propre} \end{array} \right.$$

- tous ces paramètres sont sans dimension et sont connus.

. Expression des résultats

$$\frac{x'(\tau^-)}{\omega_0 D} = \frac{\frac{x(0)}{D} \left\{ \frac{1+R}{2 \operatorname{tg} \psi} + \varepsilon \sqrt{\left[ \frac{D x(0)}{1-r^2} r^2 \right]^2 \left[ \left( \frac{1+R}{2 \operatorname{tg} \psi} \right)^2 + \left( \frac{1-R}{2r} \right)^2 \right] - \left( \frac{1-R}{2r} \right)^2} \right\}}{\left( \frac{1+R}{2 \operatorname{tg} \psi} \right)^2 + \left( \frac{1-R}{2r} \right)^2} \quad \varepsilon = \pm 1$$

$$\frac{A}{x(0)} = \frac{D}{x(0)} \frac{1+R}{2} \frac{1}{\sin \psi} \frac{x'(\tau^-)}{\omega_0 D}$$

$$\sin \psi = - \left( \frac{1-R}{2} \right) \frac{1-r^2}{r^3} \frac{x'(\tau^-)}{\omega_0 D}$$

$$\cos \psi = \frac{1-r^2}{r^2} \frac{x(0)}{D} \left[ 1 - \frac{A}{x(0)} \cos \psi \right]$$

$$\psi = \pi \left( n - \frac{N}{r} \right)$$

remarquons que quel que soit  $n$  entier,  $\frac{x'(\tau^-)}{\omega_0 D}$  a toujours la même valeur.

Une solution réelle ne peut exister :

- que si :

- l'expression sous le radical est positive ou nulle

-  $\frac{x'(\tau^-)}{\omega_0 D}$  est positive ou nulle

- et seulement si la deuxième condition de régularité des percussions est réalisée.

. Réalisation approchée de la deuxième condition de régularité des percussions

Cette condition s'exprime par  $x < x(0)$  pour  $0 < t < \tau$ , soit

$$\begin{cases} \frac{x}{x(0)} < 1 & \text{si } x(0) > 0 \\ \frac{x}{x(0)} > 1 & \text{si } x(0) < 0 \end{cases}$$

$$\text{avec } x = A \cos (\omega_0 t + \psi) + \frac{Dr^2}{1-r^2} \cos (r\omega_0 t + \phi)$$

ainsi :

$$\frac{A}{x(0)} \cos (\omega_0 t + \psi) + \frac{D}{x(0)} \frac{r^2}{1-r^2} \cos (r\omega_0 t + \phi) < 1 \quad \text{si } x(0) > 0$$

$$\frac{A}{x(0)} \cos (\omega_0 t + \psi) + \frac{D}{x(0)} \frac{r^2}{1-r^2} \cos (r\omega_0 t + \phi) > 1 \quad \text{si } x(0) < 0$$

Nous réaliserons la deuxième condition de régularité des percussions d'une manière approchée en la contrôlant pour :

$$t = \frac{\tau}{s}, \frac{2\tau}{s}, \dots, \left(\frac{s-1}{s}\right) \tau \quad s : \text{nombre entier}$$

ou plus exactement pour :

$$\omega_0 t = \frac{\omega_0 \tau}{s}, \dots, \left(\frac{s-1}{s}\right) \omega_0 \tau \quad \text{avec} \quad \omega_0 \tau = \frac{2N\pi}{r}$$

### Cas particuliers

$$+ r = 1 \quad \frac{x'(\tau^-)}{\omega_0 D} = \frac{\varepsilon N \pi}{1+R}$$

- la vitesse de percussion est indépendante de  $x(0)$  pour  $r = 1$

- il n'existe pas de phénomène de résonance tant que  $x(0)$  est fini

$$+ \begin{cases} r \neq 1 \\ \text{tg} \psi = 0 \end{cases}$$

$$\frac{x'(\tau^-)}{\omega_0 D} = 0$$

- la vitesse de percussion s'annule chaque fois que  $\psi = \frac{\pi}{2} + k \pi$ , quel que soit  $k$  entier, sauf pour  $r = 1$

$$+ \text{tg} \psi = \pm \infty \quad \frac{x'(\tau^-)}{\omega_0 D} = \frac{2r\varepsilon \sqrt{\left(\frac{r^2}{1-r^2}\right)^2 - \left(\frac{x(0)}{D}\right)^2}}{1-R}, \text{ pour } R < 1$$

- la vitesse de percussion est finie tant que  $x(0)$  reste fini et  $R$  inférieur à l'unité.

$$\frac{x'(\tau^-)}{\omega_0 D} = \infty \quad \text{pour } R = 1$$

### 3 - RESULTATS -

Les résultats des calculs numériques seront présentés sous la forme de graphes de la fonction  $\frac{x'(\tau^-)}{\omega_0 D} = f(r)$  à  $\frac{x(0)}{D}$ ,  $R$  et  $N$  constants.

L'analyse de ces graphes nous permettra de dégager l'influence de chaque paramètre sur le maximum de la vitesse de percussion et sur la forme et l'étendue des plages de percussions.

Nous étudierons tout d'abord le cas de l'interstice positif ou nul puis, ensuite, le cas de l'interstice négatif.

### 3,1 L'interstice est positif ou nul

#### 3,1,1 Préliminaire

##### 3,1,1,1 Courbe de résonance

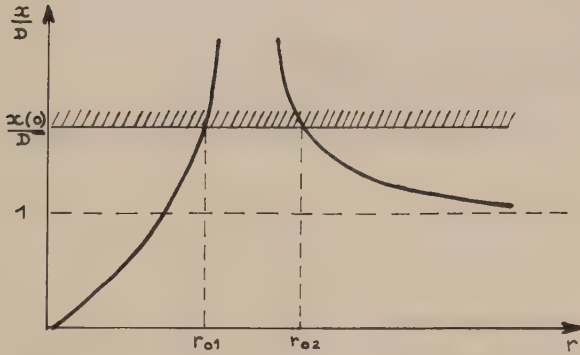


Fig 1

La présence de la butée empêche le déplacement d'être supérieur à  $x(o)$ , ce qui se traduit pour un "barrage" à  $\frac{x(o)}{D}$ . (cf Fig. 1).

Pour  $r_{01}$  et  $r_{02}$  la vitesse de percussion est nulle : le percuteur vient effleurer la butée.

Les percussions sont automatiques si, et seulement si :

$$r_{01} < r < r_{02}$$

avec 
$$r_{01} = \sqrt{\frac{x(o)/D}{1 + x(o)/D}}$$

$$r_{02} = \sqrt{\frac{x(o)/D}{x(o)/D - 1}} \quad \text{si } \frac{x(o)}{D} > 1$$

$$r_{02} = \infty \quad \text{si } \frac{x(o)}{D} \leq 1$$

##### 3,1,1,2 Influence de R, N et $\frac{x(o)}{D}$ sur la plage de percussions automatiques

##### Influence de R et N :

La plage de percussions automatiques est indépendante de R et N.

##### Influence de $\frac{x(o)}{D}$

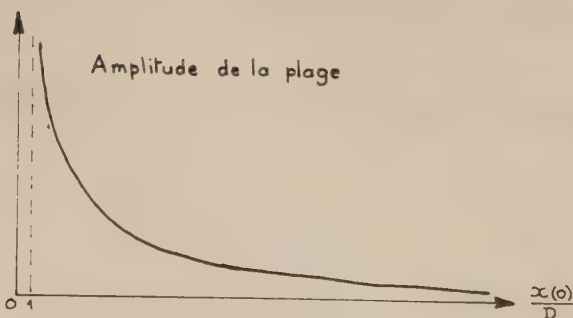


Fig 2

Nous rapprocherons les graphes de

$$\frac{x'(\tau^-)}{\omega_0 D} = f(r) \text{ de la courbe classique}$$

de résonance des systèmes à 1° de liberté, non limités en déplacement.

$$\frac{x}{D} = \left| \frac{r^2}{1 - r^2} \right|$$

Quand  $\frac{x(o)}{D}$  croît :

- de 0 à 1, la plage est infinie
- au dessus de 1, la plage décroît rapidement pour tendre vers une valeur nulle.

3,1,1,3 Conditions pour qu'il puisse exister deux valeurs de la vitesse de percussion pour un même  $r$  ( $\frac{x(o)}{D}$ ,  $R$  et  $N$  constants)

Nous appellerons les plages où les conditions sont réalisées : plages à double valeur de la vitesse de percussion.

Les conditions sont définies par :

$$\left\{ \frac{1+R}{\operatorname{tg} \psi} + \varepsilon \sqrt{\left[ \frac{D x(o)}{1-r^2} r^2 \right]^2 \left[ \left( \frac{1+R}{\operatorname{tg} \psi} \right)^2 + \left( \frac{1-R}{r} \right)^2 \right] - \left( \frac{1-R}{r} \right)^2} \right\} \geq 0 \quad \forall \varepsilon = \pm 1$$

ce qui implique :

1) que l'expression sous le radical soit positive ; la valeur  $r = r_d$  l'annulant correspond au point de décrochement.

$$2) \operatorname{tg} \psi \geq 0$$

$$\text{or } \psi = \pi \left( 1 - \frac{N}{r} \right) \text{ d'où}$$

$$\frac{N}{1-k} < r < \frac{2N}{1-2k} \quad \text{quel que soit } k \text{ entier}$$

$$3) \frac{1+R}{\operatorname{tg} \psi} - \sqrt{\quad} \geq 0$$

$$\text{ainsi } r < r_{01} = \sqrt{\frac{x(o)/D}{x(o)/D+1}} \quad \text{pour } r < 1$$

$$r > r_{02} = \sqrt{\frac{x(o)/D}{x(o)/D-1}} \quad \text{pour } r > 1 \text{ et } \frac{x(o)}{D} > 1$$

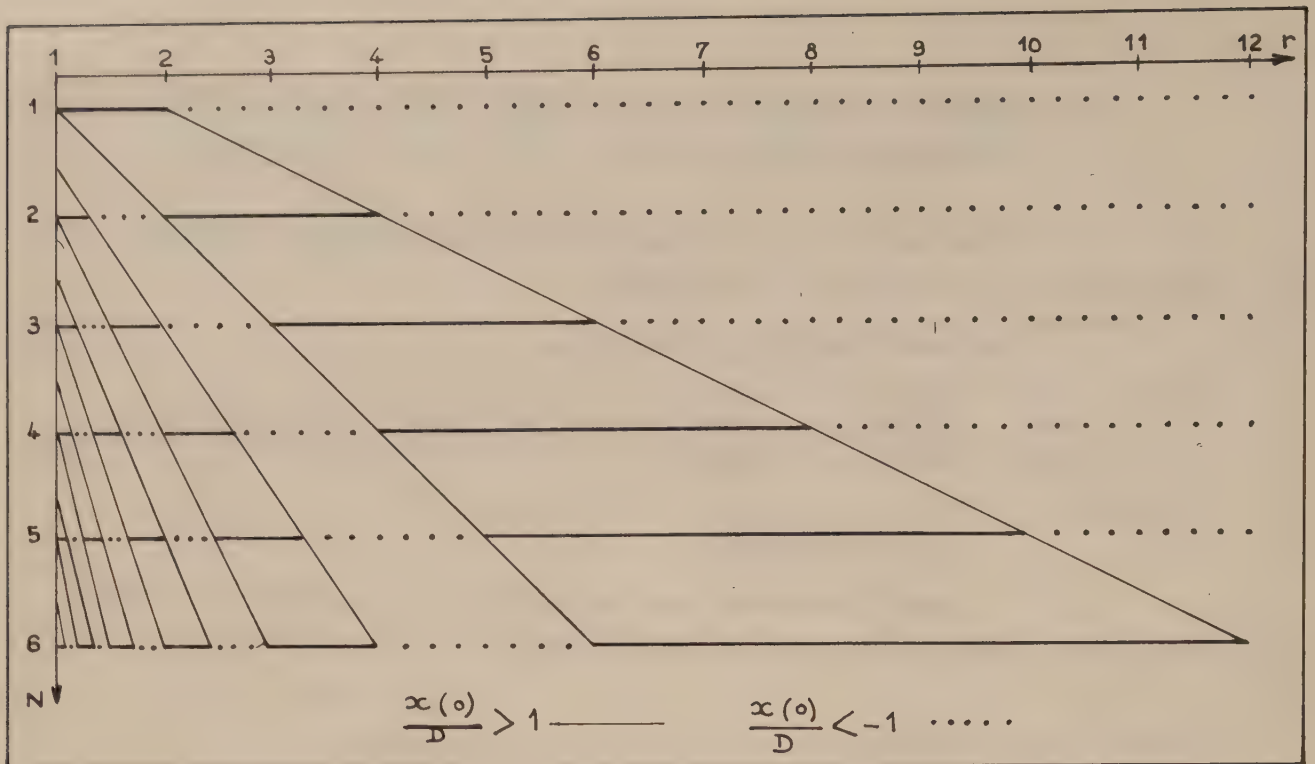
"il ne peut exister deux valeurs de la vitesse de percussion pour une même valeur de  $r$  dans la plage de percussions automatiques".

En résumé, les plages sont définies par :

|                                                                                       |                                                                           |
|---------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| $\frac{N}{1-k} < \sqrt{\frac{x(o)/D}{x(o)/D-1}} \leq r \leq r_d \leq \frac{2N}{1-2k}$ | pour $\begin{cases} \frac{r}{x(o)} > 1 \\ \frac{x(o)}{D} > 1 \end{cases}$ |
| $\frac{N}{1-k} \leq r \leq r_d \leq \sqrt{\frac{x(o)/D}{x(o)/D+1}} < \frac{2N}{1-2k}$ | pour $r < 1$                                                              |

quel que soit  $k$  entier.

L'abaque à points alignés ci-après permet de déterminer immédiatement ces plages pour  $N$  variant de 1 à 6 et  $1 < r < 12$



abaque des plages à double valeurs de la vitesse de percussions

### 3,1,1,4 Différents types de plages de percussions

Nous pouvons classer les plages de percussions en 3 types  
 ( $\frac{x(o)}{D}$ , N et R étant fixés) :

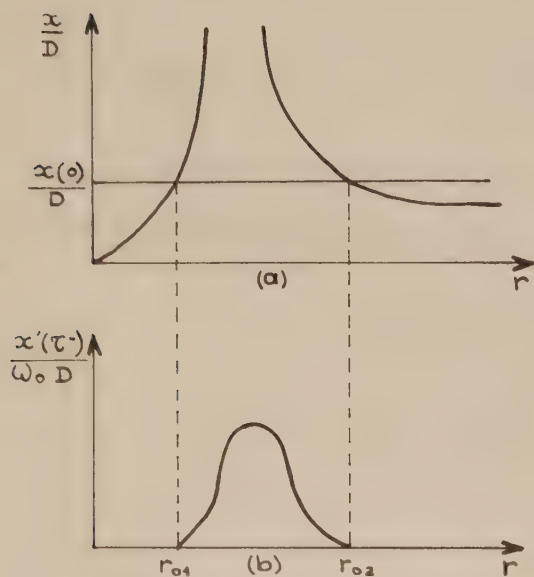


Fig 3

#### 1 - Plage de percussions automatiques

$$r_{o1} < r < r_{o2}$$

cf Fig. 3 a, b, c

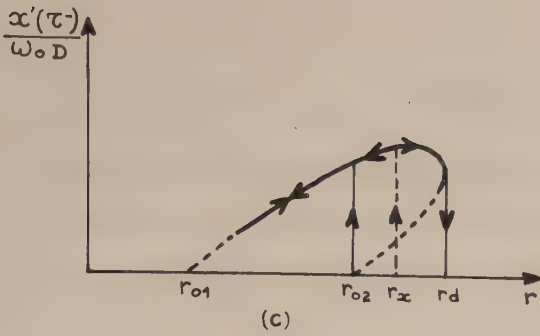


Fig 3

Si maintenant  $r$  décroît à partir de  $r_d$  deux cas sont possibles :

-  $r = r_x$  avec  $r_{02} < r_x < r_d$ , il n'y a pas de percussion, sauf si elles sont provoquées.

-  $r$  décroît jusqu'à  $r_{02}$ , l'accrochage est automatique.

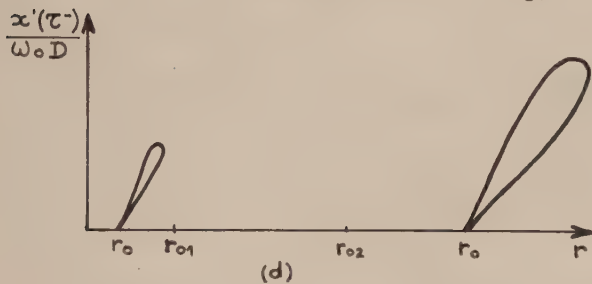


Fig 3

Elles se situent toujours hors de la plage automatique et prennent naissance pour  $r = r_0$  tel que  $\text{tg}\psi = 0$  pour cette valeur, c'est-à-dire pour :

$$r_0 = \left| \frac{N}{1-4k} \right|$$

### 3,1,2 Influence de $\frac{x(0)}{D}$ (R et N constants)

#### 3,1,2,1 Généralités

1er cas  $\frac{x(0)}{D} \leq 1$  (Fig. 4 a, b)

- La plage de percussions automatiques varie de  $r_{01}$  à  $\infty$ .
- Il ne peut exister de plages semi-automatiques.
- Les plages non automatiques se situent dans la zone  $r < r_{01} < 1$ .
- Pour  $r > 1$ , la vitesse de percussion passe par  $N$  maxima et  $\text{tg}\psi$  s'annule  $(N-1)$  fois.

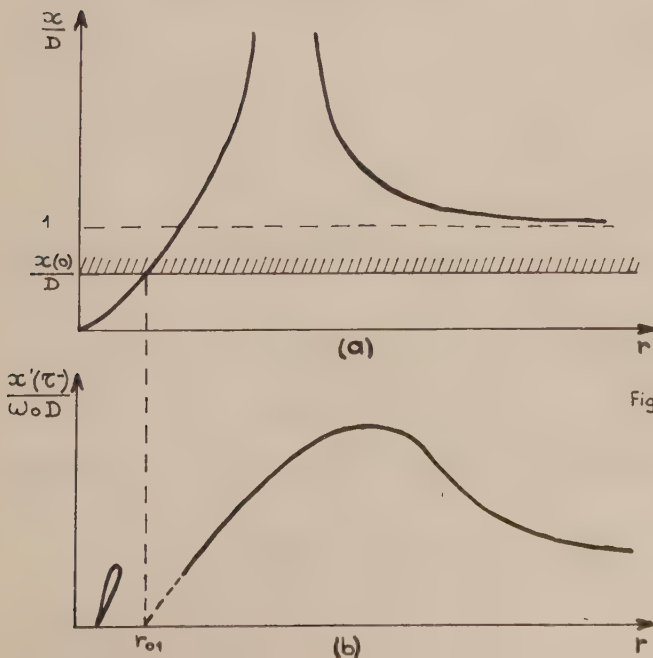


Fig 4

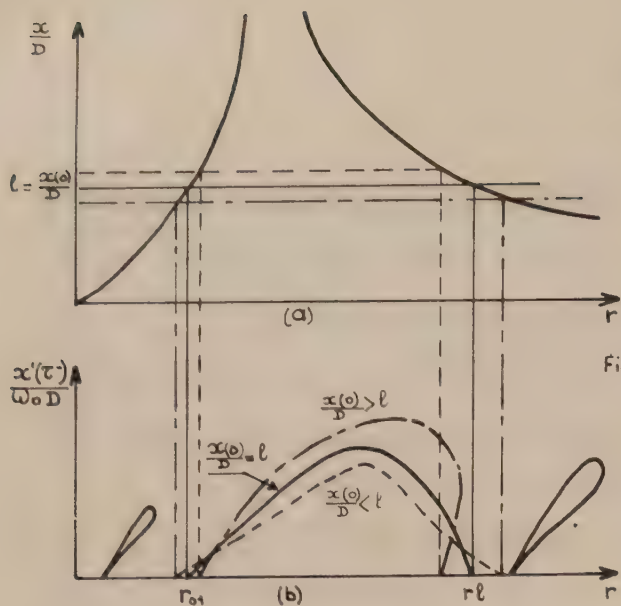


Fig 5

2ème cas  $\frac{x(o)}{D} = l > 1$  (Fig. 5 a, b)

C'est le cas limite de passage des plages où il peut exister 2 valeurs de  $\frac{x'(\tau)}{\omega_0 D}$  à celles où la vitesse de percussion est unique :

Si  $\frac{x(o)}{D}$  croît légèrement, nous obtenons une plage semi-automatique.

L'abaque à points alignés donne directement les limites des plages et par suite la valeur de  $r_l$ . Or:

$$r_l = r_{02} = \sqrt{\frac{x(o)/D}{x(o)/D - 1}}, \text{ d'où la valeur de } \frac{x(o)}{D}$$

Exemple :  $N = 1, r_l = 2 \implies \frac{x(o)}{D} = 1,33$

$N = 4, r_l = 2,666 \implies \frac{x(o)}{D} = 1,16$

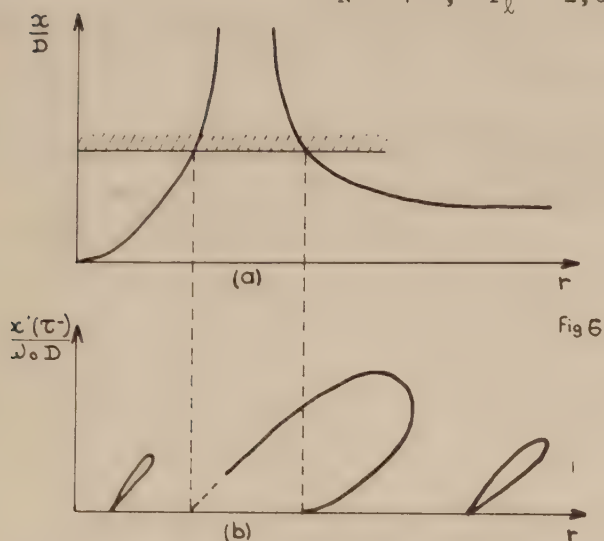


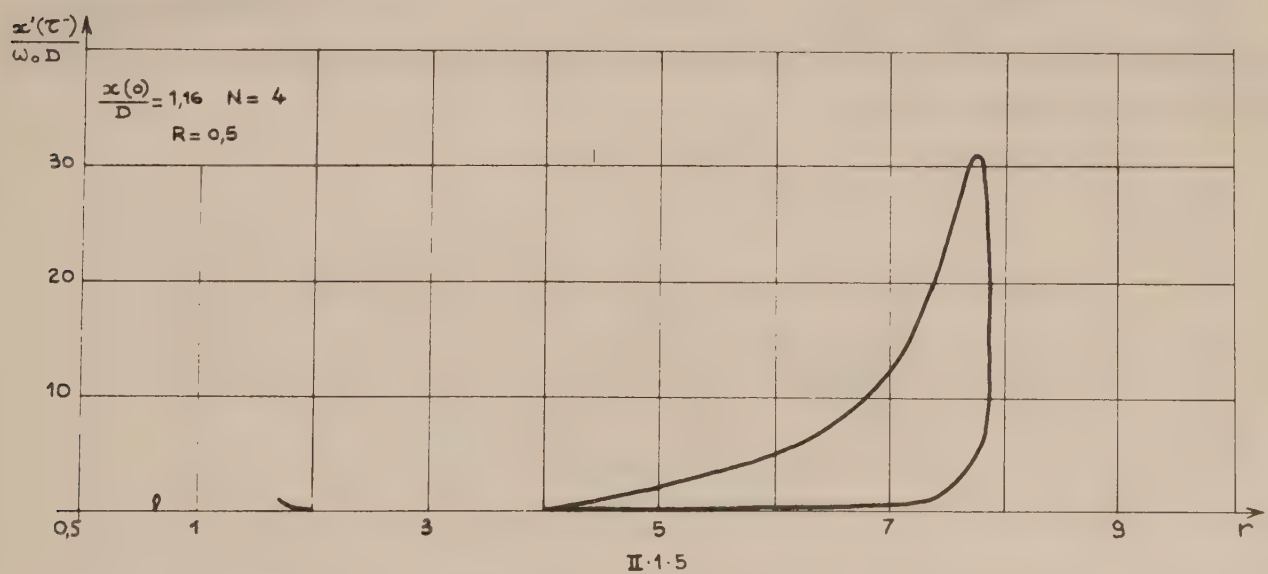
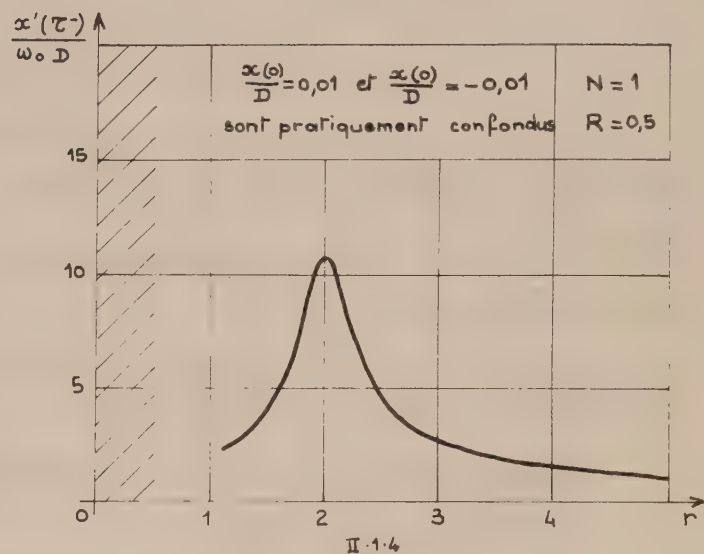
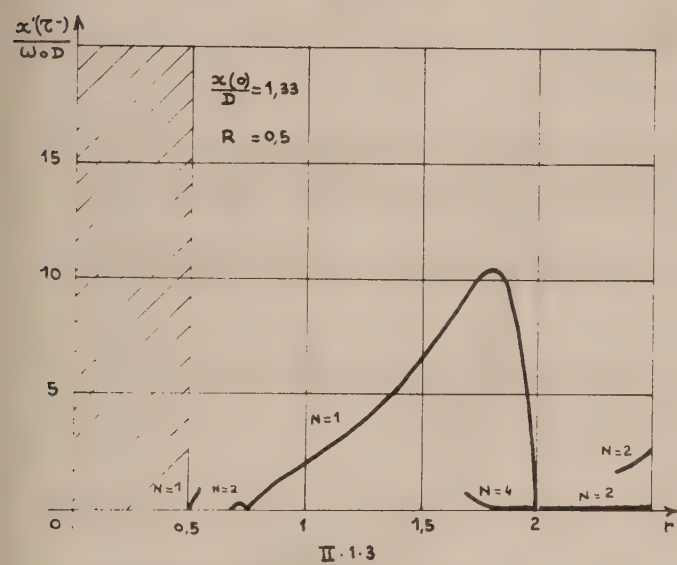
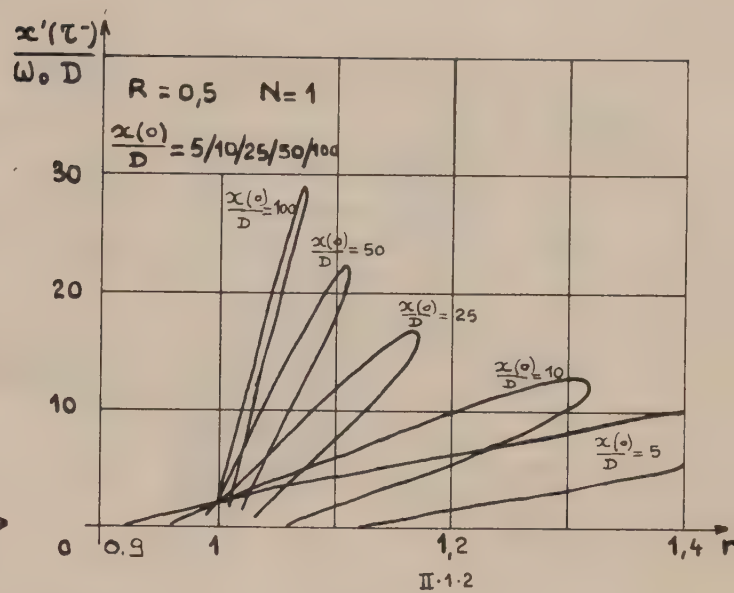
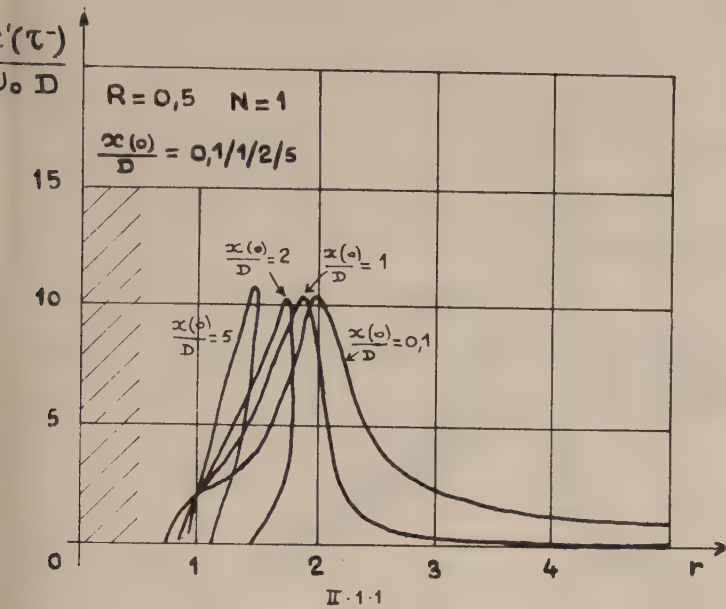
Fig 6

3ème cas  $\frac{x(o)}{D} > l$  (Fig. 6 a, b)

Les 3 types de plages: automatiques, semi-automatiques et non automatiques sont possibles. Elles sont finies et les 2 premières existent toujours.

3, 1, 2, 2 Graphes

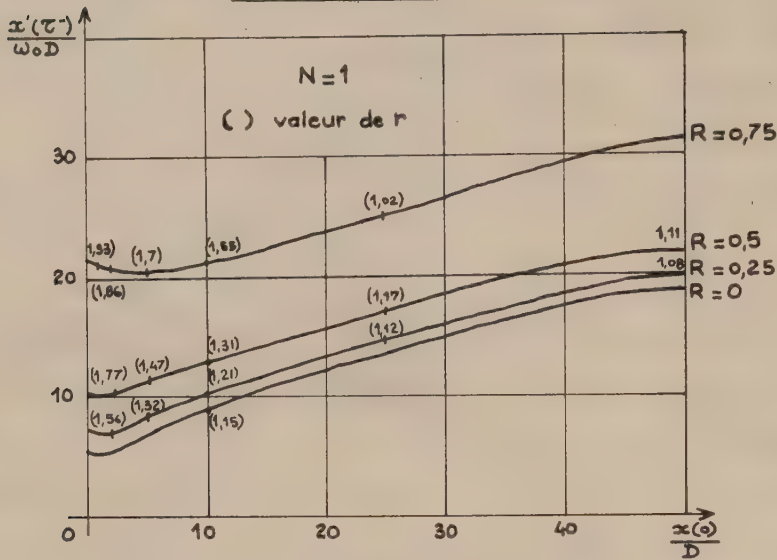
| $x(o)/D$       | N   | R   | r         | Graphe<br>n° | Observations     |
|----------------|-----|-----|-----------|--------------|------------------|
| 0,1/1/2/5      | 1   | 0,5 | 0,5 - 5   | II-1-1       |                  |
| 5/10/25/50/100 | 1   | 0,5 | 0,5 - 1,4 | 2            |                  |
| 1,33           | 1,4 | 0,5 | 0,5 - 2,5 | 3            | cas limite       |
| 0,01/-0,01     | 1   | 0,5 | 0,5 - 5   | 4            | $x(o) \approx 0$ |
| 1,16           | 4   | 0,5 | 0,5 - 10  | 5            | cas limite       |
|                |     |     |           |              |                  |



Remarques : - Quel que soit  $\frac{x(0)}{D}$ , pour  $R$  et  $N$  constants,  $\frac{x'(\tau^-)}{\omega_0 D}$  est une constante pour  $r = 1$ .

- Il existe une limite à  $\frac{x'(\tau^-)}{\omega_0 D}$  pour  $x(0) = 0$ .

### 3,1,2,3 Lois générales



Graphe n° II-1-6

Quand  $\frac{x(0)}{D}$  croît à partir de 0 :

- le maximum de la vitesse de percussion commence par décroître légèrement puis croît, alors que la fréquence d'excitation correspondante décroît toujours.

- la plage de percussions semi-automatiques diminue d'amplitude. Elle n'existe que pour  $\frac{x(0)}{D} > 2$

- les plages de percussions non automatiques diminuent d'amplitude. Pour  $N = 1$ , elles n'existent que si  $r$  est inférieur à l'unité.

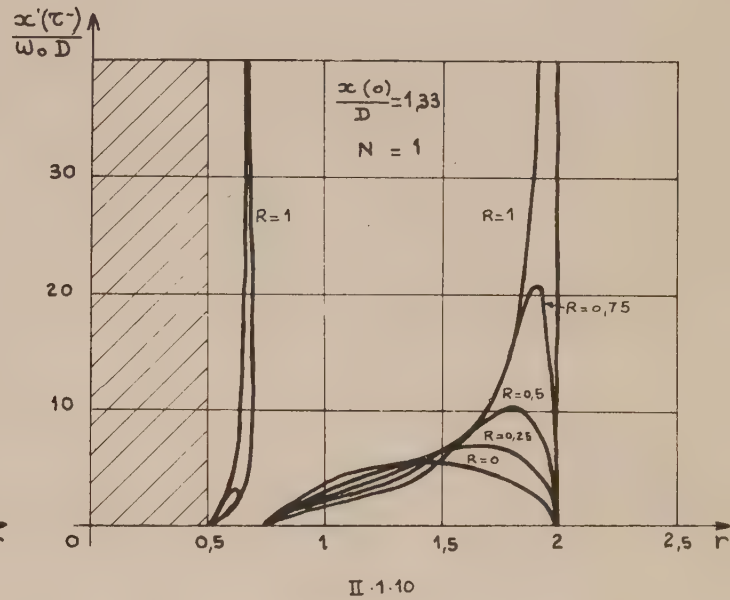
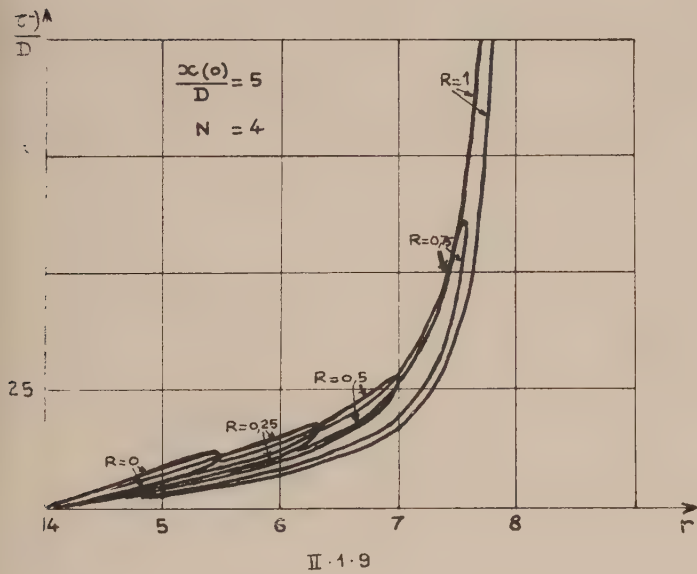
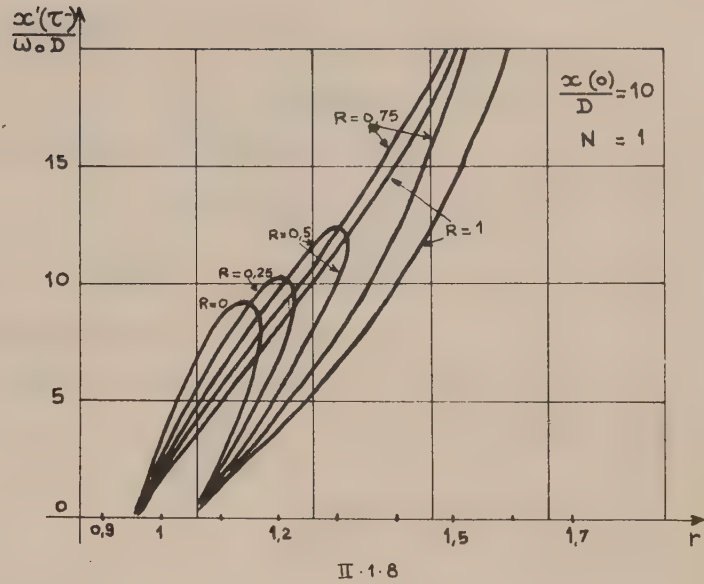
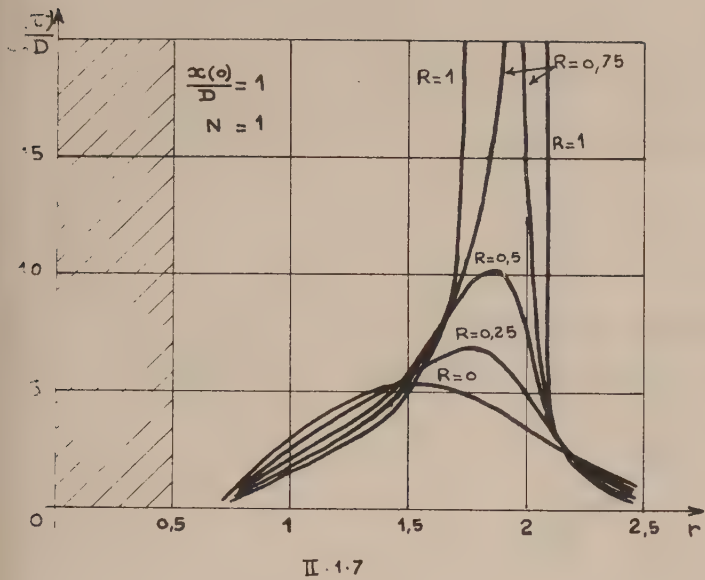
### 3,1,3 Influence de $R$ ( $\frac{x(0)}{D}$ et $N$ constants)

#### 3,1,3,1 Généralités

$R$  est un coefficient variant de 0 à 1, ce qui correspond, d'une part à une vitesse du percuteur nulle immédiatement après chaque percussion, d'autre part à une butée parfaitement élastique.

#### 3,1,3,2 Graphes

| $R$                | $\frac{x(0)}{D}$ | $N$ | $r$       | Graphe n° |
|--------------------|------------------|-----|-----------|-----------|
| 0/0,25/0,50/0,75/1 | 1                | 1   | 0,5 - 2,5 | II-1-7    |
| "                  | 10               | 1   | 0,9 - 1,7 | 8         |
| "                  | 5                | 4   | 4 - 8     | 9         |
| "                  | 1,33             | 1   | 0,5 - 2,5 | 10        |
| :                  | :                | :   | :         | :         |



### 3,1,3,3 - Lois générales

. Quand  $R$  croît :

- pour une même fréquence d'excitation, la vitesse de percussion peut augmenter ou diminuer.
- le maximum de la vitesse de percussion croît, ainsi que le  $r$  correspondant (cf. graphe II-1-6).
- l'amplitude des plages semi-automatiques et non automatiques croît.

- . La vitesse de percussion devient infinie pour  $R = 1$  et  $\text{tg} \psi = \pm \infty$
- . La naissance des plages non automatiques est indépendante de  $R$ .
- . Le type de plages de percussions est indépendant de  $R$ .

### 3,1,4 Influence de $N$ ( $\frac{x(0)}{D}$ et $R$ constants)

#### 3,1,4,1 Généralités

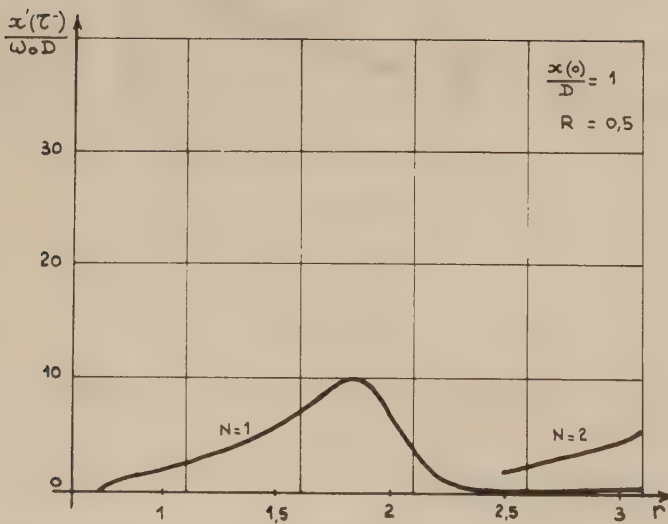
$N$  est un nombre entier qui intervient dans l'expression de la vitesse de percussion pour  $\text{tg}\psi$ , avec :

$$\psi = \pi \left(1 - \frac{N}{r}\right)$$

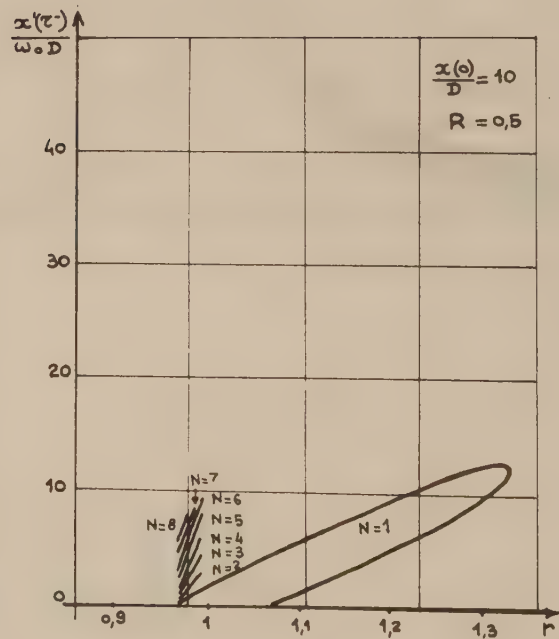
La naissance de chaque plage non automatique est liée à  $\text{tg}\psi = 0$  (sauf pour  $r = 1$ ) ; par suite, quand  $N$  croît, le nombre de ces plages non automatiques augmente.

#### 3,1,4,2 Graphes

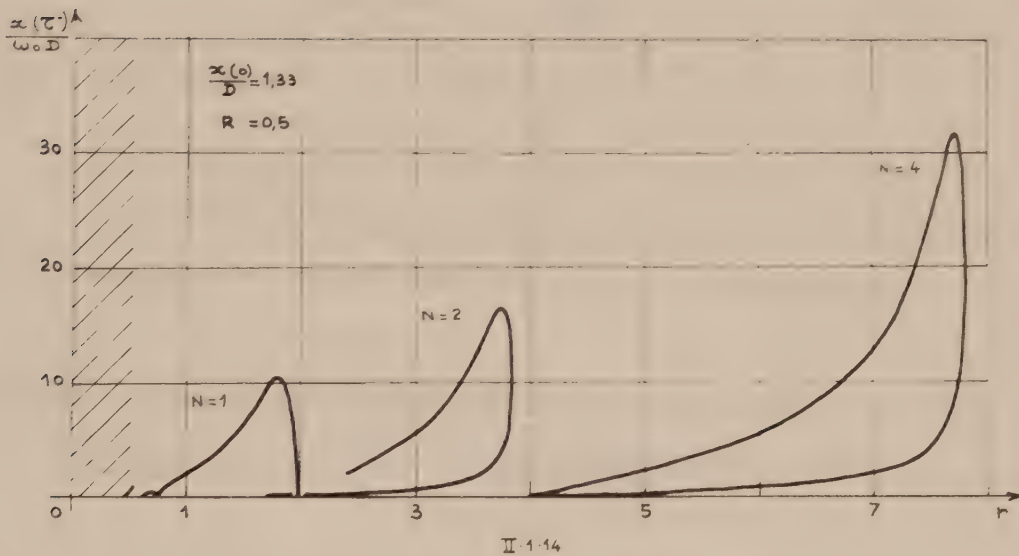
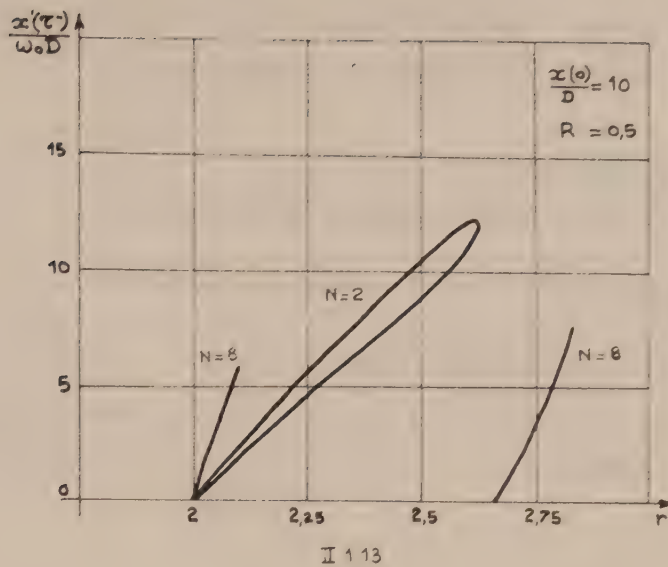
| $N$             | $x(0)/D$ | $R$ | $r$       | Graphe<br>$n^\circ$ |
|-----------------|----------|-----|-----------|---------------------|
| 1/2             | 1        | 0,5 | 0,5 - 3,1 | II-1-11             |
| 1/2/3/4/5/6/7/8 | 10       | 0,5 | 0,9 - 1,4 | 12                  |
| 2/8             | 10       | 0,5 | 2 - 3     | 13                  |
| 1/2/4           | 1,33     | 0,5 | 0,5 - 8   | 14                  |



II-1-11



II-1-12



### 3,1,4,3 Lois générales

. Quand  $N$  croît

- pour chaque type de plage de percussions, le maximum de la vitesse de percussion croît.
- l'amplitude des plages semi-automatiques et non automatiques diminue.

. Pour  $r$  supérieur à l'unité

- si elles existent, le nombre de plages non automatiques est égal à  $N-1$  ( $N > 1$ ).

- la vitesse de percussion passe par N maxima
- pour N fixé, la vitesse maximum de percussion est située dans la dernière plage non automatique.

### 3,2 L'interstice est négatif

Le ressort de raideur k est comprimé initialement.

#### 3,2,1 Préliminaire

##### 3,2,1,1 Plage de percussions automatiques

Les percussions ne seront automatiques que si et seulement si l'amplitude de la force excitatrice est supérieure à la force de compression statique du ressort

$$m_b a \Omega^2 > -k x(0)$$

ou  $D r^2 > -x(0)$  avec  $x(0) < 0$

$$r > \sqrt{-\frac{x(0)}{D}} = r_0$$

Pour  $r > r_0$  les percussions existeront toujours.

Remarquons que la plage de percussions automatiques est indépendante de R et N.

##### 3,2,1,2 Conditions pour qu'il puisse exister des plages à double valeur de la vitesse de percussion ( $\frac{x(0)}{D}$ , R et N constants)

Pour cela, il suffit que :

$$\left\{ \frac{1+R}{\operatorname{tg} \psi} + \varepsilon \sqrt{\left[ -\frac{D x(0)}{1-r^2} r^2 \right] \left[ \left( \frac{1+R}{\operatorname{tg} \psi} \right)^2 + \left( \frac{1-R}{r} \right)^2 \right] - \left( \frac{1-R}{r} \right)^2} \right\} < 0 \quad \forall \varepsilon = \pm 1$$

Ainsi :

1) L'expression sous le radical doit être positive ; elle est nulle pour  $r = r_d$ , point de décrochement.

2)  $\operatorname{tg} \psi < 0$

Soit  $\frac{2N}{1-2k} < r < -\frac{N}{k}$  quel que soit k entier

3)  $\frac{1+R}{\operatorname{tg} \psi} + \sqrt{\quad} < 0$

d'où

$$r < r_{01} = \sqrt{\frac{x(o)/D}{x(o)/D - 1}} \quad \text{pour } r < 1$$

$$r > r_{02} = \sqrt{\frac{x(o)/D}{x(o)/D + 1}} \quad \text{pour } r > 1 \text{ et } \frac{x(o)}{D} < -1$$

En résumé, les plages sont définies par :

|                                                                                                                                                         |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\frac{2N}{1-2k} \leq \sqrt{\frac{x(o)/D}{x(o)/D + 1}} \leq r_d \leq r < -\frac{N}{k} \quad \text{pour } \left\{ \frac{x(o)}{D} > \frac{1}{-1} \right.$ |
| $\frac{2N}{1-2k} < r_d \leq r \leq \sqrt{\frac{x(o)/D}{x(o)/D - 1}} \leq -\frac{N}{k} \quad \text{pour } r < 1$                                         |

quel que soit  
k entier

Remarquons que ces plages sont complémentaires de celles obtenues pour l'interstice positif (cf abaque à points alignés).

### 3,2,1,3 Différents types de plages de percussions

Il est évident que nous retrouverons, sous une forme différente, les 3 types de plages de percussions :

- automatiques
- semi-automatiques
- non-automatiques

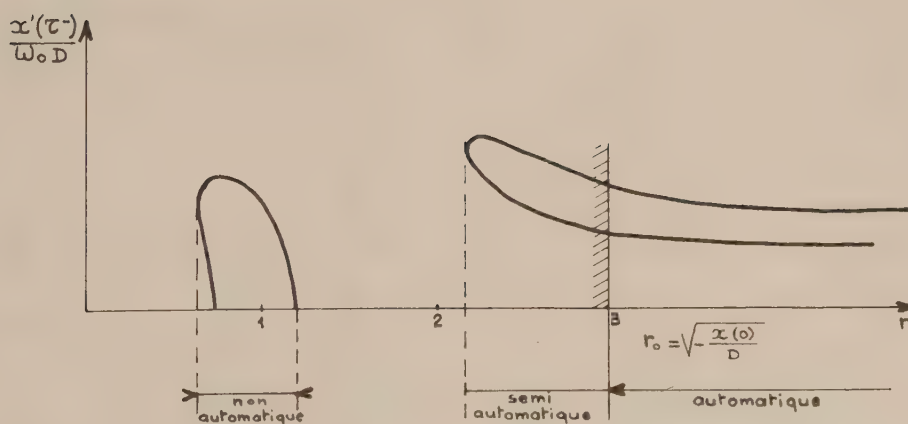


Fig 7

### 3,2,2 Influence de $\frac{x(0)}{D}$ (N et R constants)

#### 3,2,2,1 Généralités

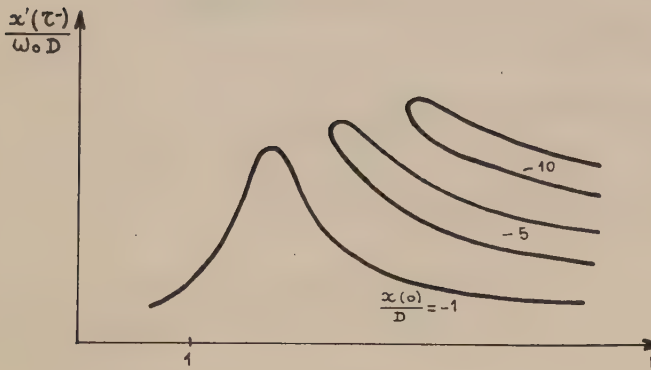


Fig 6

- Pour  $-\ell < \frac{x(0)}{D} < 0$

les graphes sont analogues à ceux  
trouvés pour  $0 < \frac{x(0)}{D} < \ell$

- Pour  $\frac{x(0)}{D} < -\ell$  ils diffèrent très  
sensiblement (Fig. 8)

- Les plages où il existe 2 valeurs de  
 $\frac{x'(\tau)}{\omega_0 D}$  pour un même  $r$  sont bien vérifiées.

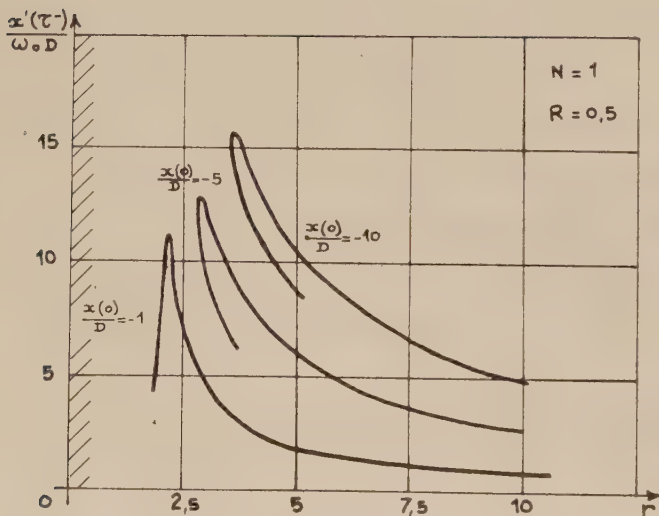
Exemple :  $N = 1; \frac{x(0)}{D} = -1,33$

entraîne  $2 \leq r \leq \infty$

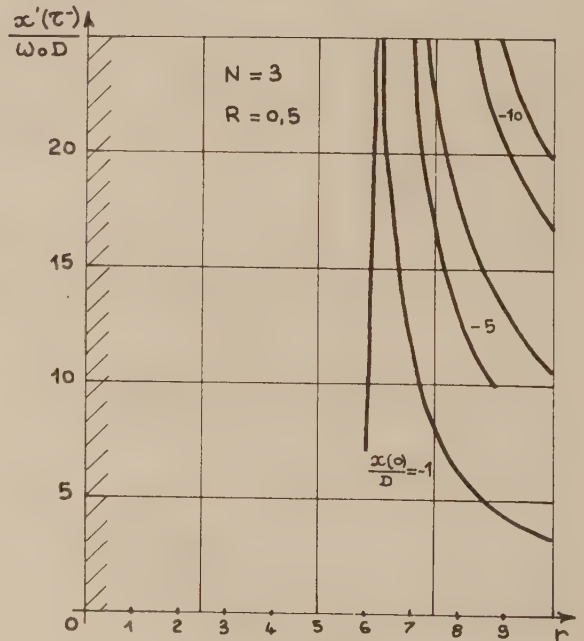
Nota : La valeur limite de  $\frac{x(0)}{D} = -\ell$  est calculée comme indiqué au § 3,1,2.  
Ici  $\ell > 0$

#### 3,2,2,2 Graphes

| $x(0)/D$  | N | R   | r        | Graphe<br>n° |
|-----------|---|-----|----------|--------------|
| -1/-5/-10 | 1 | 0,5 | 0,5 — 10 | II-1-15      |
| -1/-5/-10 | 3 | 0,5 | 0,5 — 10 | 16           |
| :         | : | :   | :        | :            |



II-1-15



II-1-16

### 3,2,2,3 Lois générales

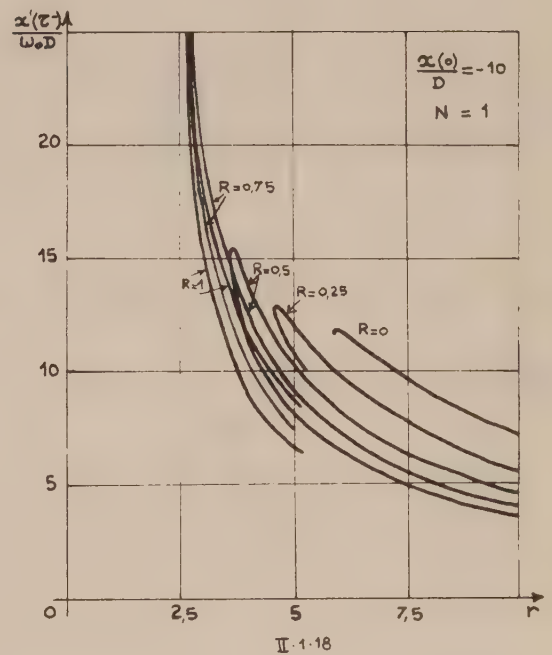
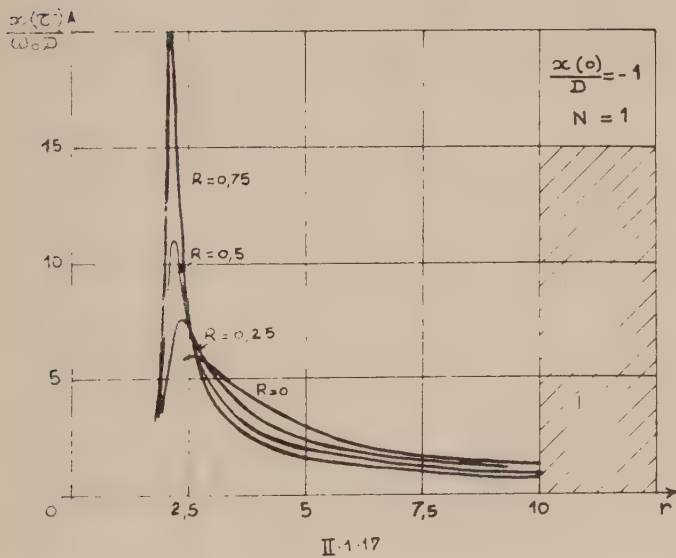
Quand  $\frac{x(0)}{D}$  décroît :

- le maximum de la vitesse de percussion croît ainsi que la fréquence d'excitation correspondante.
- la valeur  $r = r_d$  du point de décrochement croît

### 3,2,3 Influence de R ( $\frac{x(0)}{D}$ et N constants)

#### 3,2,3,1 Graphes

| R                  | $x(0)/D$ | N | r        | Graphe<br>N° |
|--------------------|----------|---|----------|--------------|
| 0/0,25/0,50/0,75/  | - 1      | 1 | 0,5 - 10 | II-1-17      |
| 0/0,25/0,50/0,75/1 | - 10     | 1 | 0,5 - 10 | 18           |



### 3,2,3,2 Lois générales

Quand R croît :

- le maximum de la vitesse de percussion croît, alors que la fréquence d'excitation correspondante décroît.
- la valeur  $r = r_d$  du point de décrochement décroît.

3, 2, 4 Influence de  $N$  ( $\frac{x(0)}{D}$  et  $R$  constants)

3, 2, 4, 1 Généralités

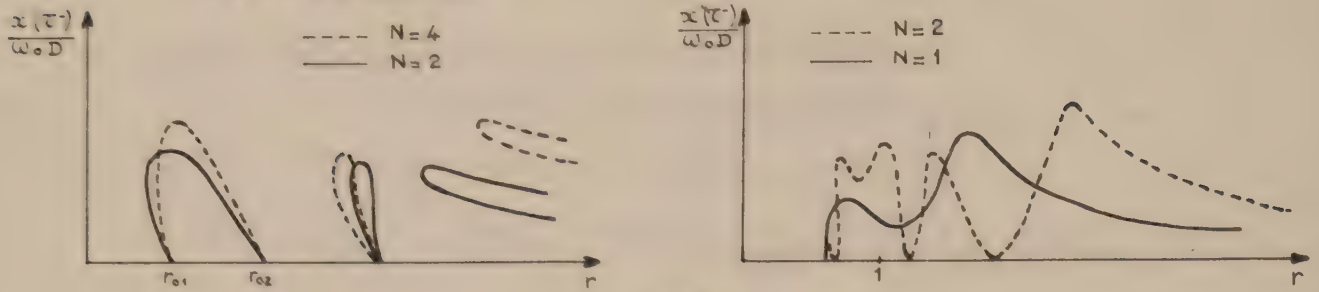
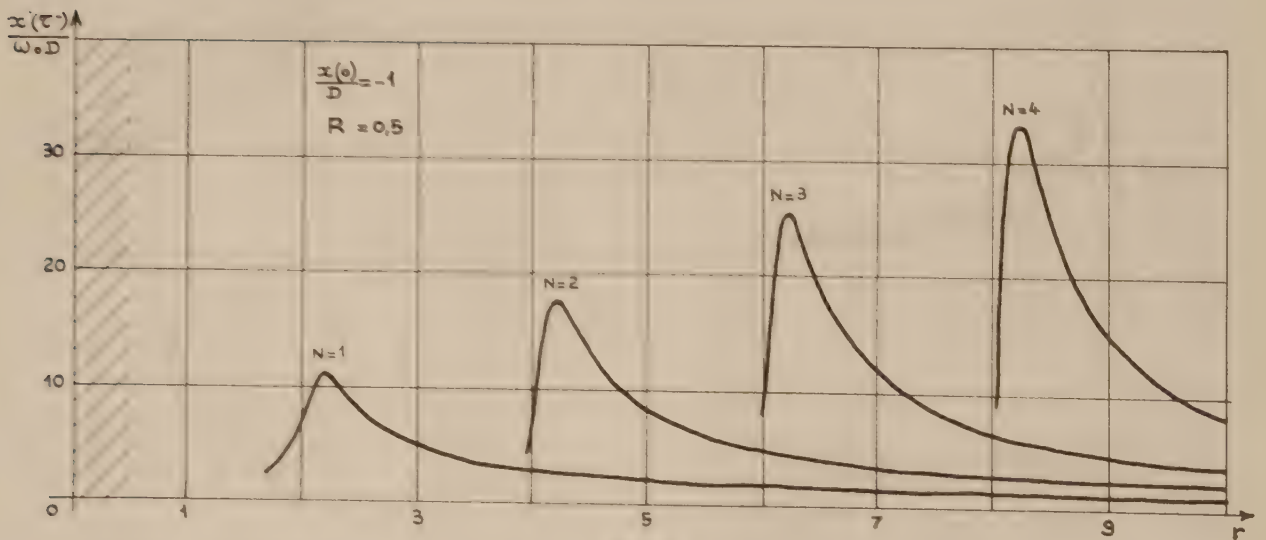


Fig 9

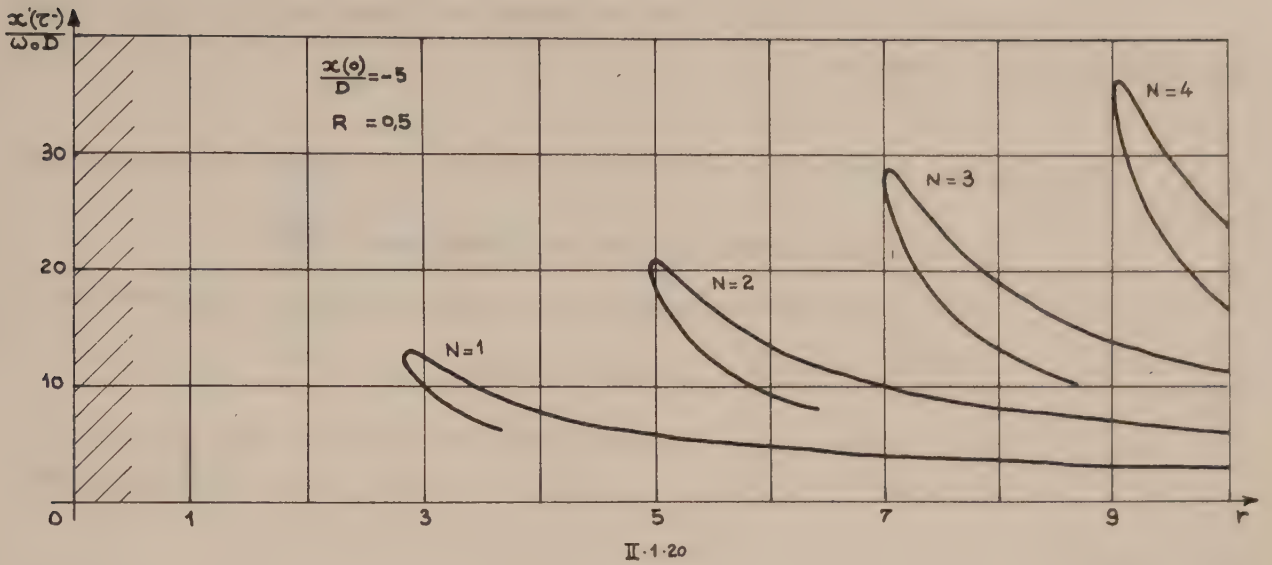
La naissance des plages pour un  $N$  entier quelconque a toujours lieu pour  $\text{tg} \delta = 0$ , sauf pour la plage voisine de  $r = 1$  où elle correspond à  $r_{01} = \sqrt{\frac{x(0)/D}{x(0)/D - 1}}$  avec  $\frac{x(0)}{D} < 0$ . Nous retrouvons la complémentarité des cas étudiés pour l'interstice positif.

3, 2, 4, 2 Graphes

| $N$     | $x(0)/D$ | $R$ | $r$      | Grappe<br>$n$ |
|---------|----------|-----|----------|---------------|
| 1/2/3/4 | - 1      | 0,5 | 0,5 / 10 | II-1-19       |
| 1/2/3/4 | - 5      | 0,5 | 0,5 / 10 | 20            |



II-1-19



### 3, 2, 4, 3 Lois générales

Quand  $N$  croît

- pour chaque plage, le maximum de la vitesse de percussion croît
- l'amplitude des plages de percussions tend à diminuer et par suite, les valeurs de  $r = r_d$  correspondant aux décrochements augmentent.

Pour un  $N$  fixé, le maximum de la vitesse de percussion se situe toujours dans la dernière plage.

### 4 - CONCLUSION -

L'analyse de l'influence des divers paramètres du système sur la vitesse de percussion nous a permis d'en déduire les lois essentielles du phénomène vibrations-percussions. Nous retiendrons particulièrement que :

. Le maximum de cette vitesse croît avec :

- $R$
- $N$
- $\frac{x(0)}{D}$  dès que  $\left| \frac{x(0)}{D} \right|$  est supérieur à une certaine valeur  $l$ .

. La vitesse de percussion reste toujours finie pour la fréquence de résonance du système sans butée ( $r = 1$ ) et ne dépend pour cette valeur que de  $N$  et  $R$ .

. La vitesse de percussion ne peut devenir infinie que pour  $R$  unité et de plus  $\text{tg} \psi = \frac{\pi}{2} + k\pi$ , quels que soient  $N$  et  $\frac{x(0)}{D}$  finis, ou évidemment pour un interstice infini et  $r$  tendant vers 1.

. Le maximum de la vitesse de percussion se situe toujours dans la dernière plage pour un  $N$  donné et  $r > 1$ .

L'étude a également mis en évidence trois sortes de plages de percussions :

- la plage automatique qui ne dépend que de  $\frac{x(0)}{D}$
- la plage semi-automatique qui, elle, dépend des 3 paramètres  $\frac{x(0)}{D}$ ,  $R$  et  $N$ .
- la plage non-automatique, qui prend naissance pour  $\text{tg}\psi = 0$  (avec  $r \neq 1$ ), dont l'amplitude est fonction de  $\frac{x(0)}{D}$ ,  $R$  et  $N$ .

## CHAPITRE 2

----

### SYSTEME A 2 DEGRES DE LIBERTE SUR BUTEE FIXE

#### EXCITE PAR BALOURDS

(STABILITE EXCLUE)

#### 1 - INTRODUCTION -

Le processus suivi pour étudier ce système sera analogue à celui retenu pour le système à 1 degré de liberté sur butée fixe. Les lois qui régissent le phénomène seront déduites de l'analyse des graphes de  $\frac{x'(\tau^-)}{\omega_1 D} = f(r_1)$  à  $\frac{x_0}{D}$ ,  $R$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $N$  constants.

#### 2 - POSITION DU PROBLEME -

Rappelons les définitions des paramètres intervenant dans l'expression de la vitesse de percussion :

$$\frac{x(o)}{D} = \frac{x(o)m_2}{m_b a}$$

|        |   |                           |
|--------|---|---------------------------|
| $x(o)$ | : | interstice réel           |
| $m_2$  | : | masse excitatrice         |
| $m_b$  | : | masse des balourds        |
| $a$    | : | excentrement des balourds |

$$R = - \left| \frac{x'(\tau^+)}{x'(\tau^-)} \right|$$

|              |   |                                                         |
|--------------|---|---------------------------------------------------------|
| $R$          | : | coefficient de restitution de vitesse $0 \leq R \leq 1$ |
| $x'(\tau^+)$ | : | vitesse immédiatement après percussion                  |
| $x'(\tau^-)$ | : | vitesse de percussion                                   |

$N$

|  |   |                                                                                      |
|--|---|--------------------------------------------------------------------------------------|
|  | : | Nombre entier de cycles décrits par l'excitation entre deux percussions consécutives |
|--|---|--------------------------------------------------------------------------------------|

$$r_1 = \frac{\Omega}{\omega_1}$$

|            |   |                                  |
|------------|---|----------------------------------|
| $\Omega$   | : | pulsation d'excitation           |
| $\omega_1$ | : | 1ère pulsation propre du système |

$$\alpha = \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \omega_2 & : \text{ 2ème pulsation propre du système} \end{array} \right.$$

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_{02}} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \omega_{02} = \sqrt{k_2/m_2} \\ k_2 & : \text{ raideur du ressort supérieur} \\ m_2 & : \text{ masse excitatrice} \end{array} \right.$$

- Tous ces paramètres sont connus et sans dimension

. Expression des résultats

$$\frac{x'(\tau^-)}{\omega_1 D} = 2 \frac{x(0)}{D} \frac{\xi + \varepsilon \sqrt{\left[ \frac{(D/x(0)) \beta^2 r_1^2}{(1-r_1^2)(1-\alpha^2 r_1^2)} \right]^2 \left[ \left( \frac{1-R}{r_1} \right)^2 + \xi^2 \right] - \left( \frac{1-R}{r_1} \right)^2}}{\left( \frac{1-R}{r_1} \right)^2 + \xi^2}$$

$$\frac{A_1}{x(0)} = - \frac{D}{x(0)} \frac{\beta^2 - 1}{1 - \alpha^2} \frac{1+R}{2} \frac{1}{\sin \psi_1} \frac{x'(\tau^-)}{\omega_1 D}$$

$$\frac{A_2}{x(0)} = \frac{D}{x(0)} \alpha \frac{\beta^2 - \alpha^2}{1 - \alpha^2} \frac{1+R}{2} \frac{1}{\sin \psi_2} \frac{x'(\tau^-)}{\omega_1 D}$$

$$\sin \varphi = - \frac{(1-r_1^2)(1-\alpha^2 r_1^2)}{\beta^2 r_1^3} \frac{1-R}{2} \frac{x'(\tau^-)}{\omega_1 D}$$

$$\cos \varphi = \frac{(1-r_1^2)(1-\alpha^2 r_1^2)}{r_1^2} \frac{x(0)}{D} \left[ 1 - \frac{A_1}{x(0)} \cos \psi_1 - \frac{A_2}{x(0)} \cos \psi_2 \right]$$

$$\psi_1 = \pi \left( n_1 - \frac{N}{r_1} \right) \quad \psi_2 = \pi \left( n_2 - \frac{N}{\alpha r_1} \right)$$

$$\text{avec } \xi = \frac{1+R}{1-\alpha^2} \left[ \frac{\alpha (\beta^2 - \alpha^2)}{\tan \psi_2} - \frac{\beta^2 - 1}{\tan \psi_1} \right]$$

Quels que soient  $n_1$  et  $n_2$  entiers, la vitesse réduite de percussion a même valeur.

Une solution n'existe :

- que si l'expression sous le radical et la vitesse de percussion sont positives ou nulles,
- et seulement si la deuxième condition de régularité des percussions est vérifiée.

Réalisation approchée de la deuxième condition de régularité des percussions

Cette condition peut se mettre sous la forme :

$$\frac{A_1}{x(0)} \cos(\omega_1 t + \psi_1) + \frac{A_2}{x(0)} \cos\left(\frac{\omega_1 t}{\alpha} + \psi_2\right) + \frac{D\beta^2 r_1^2 / x(0)}{(1-r_1^2)(1-\alpha^2 r_1^2)} \cos(r_1 \omega_1 t + \psi) \begin{cases} \leq 1 & \text{si } x(0) > 0 \\ \geq 1 & \text{si } x(0) < 0 \end{cases}$$

Elle sera réalisée d'une façon approchée si elle est vérifiée pour :

$$\omega_1 t = \frac{\omega_1 \tau}{\Delta}, \frac{2 \omega_1 \tau}{\Delta}, \dots, \frac{\Delta-1}{\Delta} \omega_1 \tau \quad \text{avec} \quad \omega_1 \tau = \frac{2 N \pi}{r_1}$$

Nous prendrons  $s = 10$

. Cas particuliers :

$$+ \begin{cases} r_1 = 1 \\ \text{tg} \psi_2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\frac{x'(\tau^-)}{\omega_1 D} = \varepsilon \frac{N\pi}{1+R} \frac{\beta^2}{\beta^2-1}$$

il n'existe pas de phénomène de résonance si  $x(0)$  est fini.

$$+ \begin{cases} \alpha r_1 = 1 \\ \text{tg} \psi_1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\frac{x'(\tau^-)}{\omega_1 D} = \varepsilon \frac{N\pi}{1+R} \frac{\beta^2}{\alpha(\beta^2-\alpha^2)}$$

même remarque que pour  $r_1 = 1$

$$+ \begin{cases} \alpha r_1 \neq 1 \\ r_1 \neq 1 \\ \text{tg} \psi_1 = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} r_1 \neq 1 \\ \alpha r_1 \neq 1 \\ \text{tg} \psi_2 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{x'(\tau^-)}{\omega_1 D} = 0 \quad \text{la vitesse de percussion s'annule}$$

$$+ \begin{cases} r_1 = 1 \\ \text{tg} \psi_2 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{x'(\tau^-)}{\omega_1 D} = \varepsilon \frac{\pi N}{1+R} \frac{\beta^2}{[\alpha^2 (\beta^2 - \alpha^2) - (\beta^2 - 1)]}$$

même remarque que pour  $r_1 = 1$

$$+ \begin{cases} \alpha r_1 = 1 \\ \text{tg} \psi_1 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{x'(\tau^-)}{\omega_1 D} = \varepsilon \frac{\pi N}{1+R} \frac{\alpha \beta^2}{[\alpha^2 (\beta^2 - \alpha^2) - (\beta^2 - 1)]}$$

même remarque que pour  $r_1 = 1$

$$+ \begin{cases} \text{tg} \psi_1 = \pm \infty \\ \text{tg} \psi_2 \text{ quelconque} \neq 0 \end{cases}$$

$$\xi = \frac{1+R}{1-\alpha^2} \left[ \frac{\alpha(\beta^2 - \alpha^2)}{\text{tg} \psi_2} \right]$$

$$+ \begin{cases} \text{tg} \psi_2 = \pm \infty \\ \text{tg} \psi_1 \text{ quelconque} \neq 0 \end{cases}$$

$$\xi = \frac{1+R}{1-\alpha^2} \frac{1-\beta^2}{\text{tg} \psi_1}$$

$$+ \begin{cases} \text{tg} \psi_1 = \pm \infty \\ \text{tg} \psi_2 = \pm \infty \end{cases}$$

$$\xi = 0$$

Remarquons que contrairement au système à un degré de liberté, la vitesse n'est jamais infinie tant que les paramètres restent finis, y compris pour le coefficient de restitution de vitesse égal à l'unité.

### 3 - RESULTATS -

Les lois essentielles caractérisant le phénomène étudié seront déduites en partie de l'analyse des graphes  $\frac{x'(\tau^-)}{\omega_1 D} = f(r_1)$ . Il n'entre pas dans notre propos de présenter tous les graphes étudiés, mais seulement ceux qui sont, à notre avis, les plus représentatifs de l'influence de tel ou tel paramètre sur la vitesse de percussion. Il va de soi que les lois édictées sont des lois générales, dont il peut exister des exceptions. Ces lois concernent exclusivement les maxima de la vitesse de percussion ainsi que l'amplitude des plages de percussions.

Une certaine analogie existe entre les graphes et les lois des systèmes à 1 et 2 degrés de liberté ; en effet on se rappellera que le système à 2 degrés peut être considéré comme la somme de 2 systèmes fictifs à 1 degré de liberté.

La théorie met en évidence que la vitesse de percussion devient nulle pour  $\text{tg}\psi_1 = 0$  ( $r_1 \neq 1$ ,  $\alpha r_1 \neq 1$ ). Nous trouverons ainsi, pour certaines valeurs des paramètres, des vitesses de percussion théoriquement nulles même dans les plages d'accrochages automatiques, c'est-à-dire où physiquement les percussions existent toujours.

L'application de la deuxième condition de régularité des percussions de la théorie générale (cf 1ère partie - Chapitre 1 - § 5), élimine les percussions dites irrégulières ce qui entraîne la "*disparition*" de certaines parties des graphes. L'analyse de ces graphes en est, par suite, sensiblement plus complexe : c'est ainsi que pour certaines plages de percussions, il peut sembler que celles-ci n'existent pas alors qu'elles existent mais sont irrégulières.

Nous retrouverons la notion des 3 plages de percussions définies au Chapitre précédent, à savoir :

- plage de percussions automatiques
- " " semi-automatiques
- " " non-automatiques

Les 2 cas : interstice positif, interstice négatif seront étudiés séparément.

### 3,1 L'interstice est positif ou nul

#### 3,1,1 Préliminaire

##### 3,1,1,1 Courbe de résonance

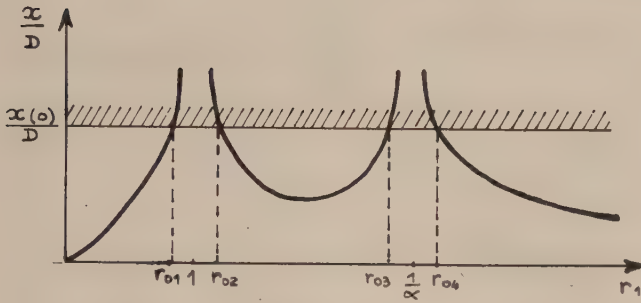


Fig 1

$$\frac{x}{D} = \left| \frac{\beta^2 r_1^2}{(1-r_1^2)(1-\alpha^2 r_1^2)} \right|$$

Si la butée est distante de  $x(o)$  du percuteur, le "barrage" se situe à  $\frac{x(o)}{D}$  sur le graphe.

Pour  $r_1 = r_{01}$ ,  $r_{02}$ ,  $r_{03}$  et  $r_{04}$  la vitesse de percussion est théoriquement nulle (le percuteur vient effleurer la butée).

Les percussions ne sont automatiques que pour :

$$r_{01} < r_1 < r_{02} \quad \text{ou} \quad r_{03} < r_1 < r_{04}$$

avec :

$$(r_{0,i})^2 = \frac{1 + \alpha^2 + \frac{D}{x(o)} \cdot \beta^2 \pm \sqrt{(1 + \alpha^2 + \frac{D}{x(o)} \cdot \beta^2)^2 - 4\alpha^2}}{2\alpha^2}$$

$i = 1$  signe -

$i = 4$  signe +

$$(r_{0,j})^2 = \frac{1 + \alpha^2 - \frac{D}{x(o)} \cdot \beta^2 \pm \sqrt{(1 + \alpha^2 - \frac{D}{x(o)} \cdot \beta^2)^2 - 4\alpha^2}}{2\alpha^2}$$

$j = 2$  signe -

$j = 3$  signe +

#### 3,1,1,2 Influence de R, N, $\frac{x(o)}{D}$ , $\alpha$ , $\beta$ sur les plages de percussions automatiques

Posons  $U_1 = r_{02} - r_{01}$  et  $U_2 = r_{04} - r_{03}$  ou  $U = r_{04} - r_{01}$  dans le cas d'une plage unique.

### 1 - Influence de R et N

Les plages de percussions automatiques sont indépendantes de R et N.

### 2 - Influence de $\frac{x(0)}{D}$ ( $\alpha$ et $\beta$ constants)

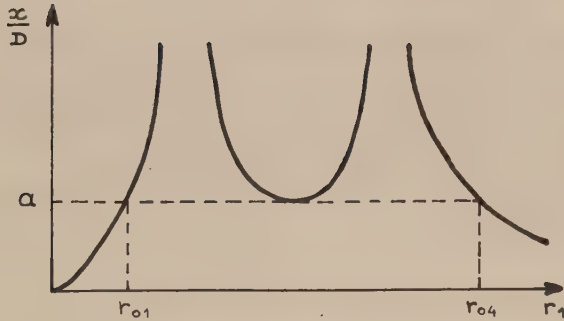


Fig 2

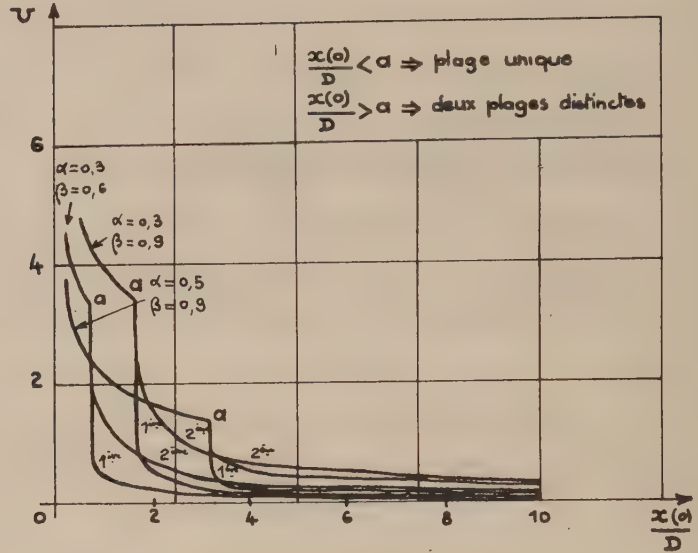


Fig 3

Quand  $\frac{x(0)}{D}$  croît à partir de zéro, la plage unique d'amplitude U décroît puis se scinde en deux plages distinctes  $U_1$  et  $U_2$  dès que  $\frac{x(0)}{D} > a$ . Les amplitudes de ces deux plages diminuent si  $\frac{x(0)}{D}$  augmente.

### 3 - Influence de $\alpha$ ( $\frac{x(0)}{D}$ et $\beta$ constants)

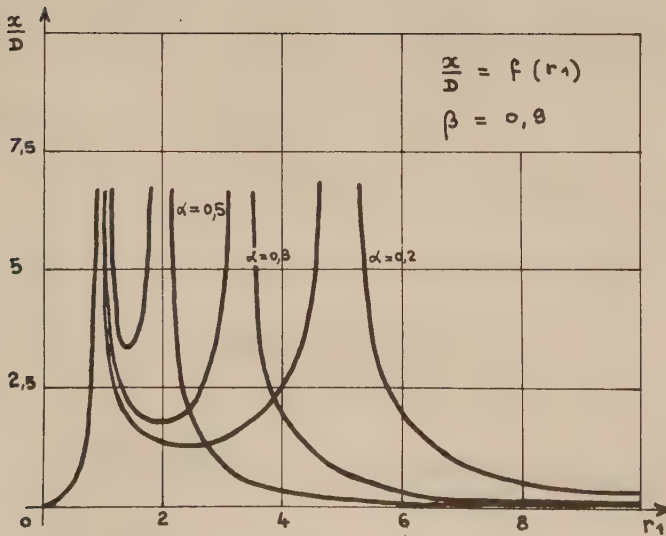


Fig 4

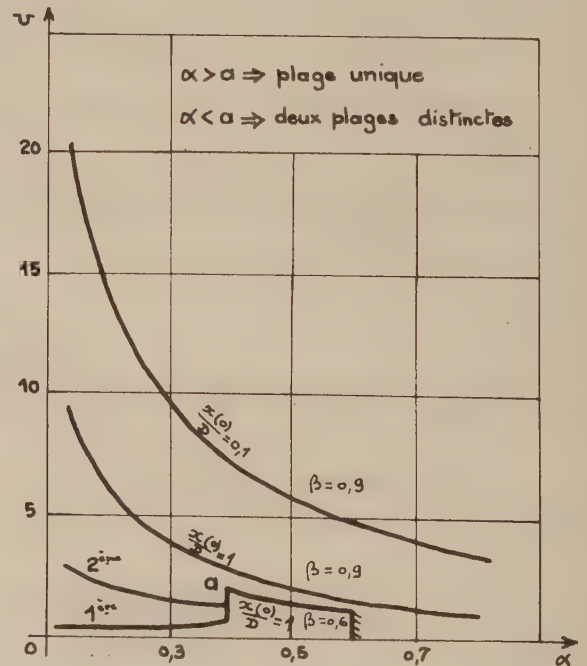


Fig 5

Quand  $\alpha$  croît :

- l'amplitude  $U$ , les amplitudes  $U_1$  et  $U_2$  diminuent.
- A deux plages distinctes tend à se substituer une plage unique.

4 - Influence de  $\beta$  ( $\alpha$  et  $\frac{x(0)}{D}$  constants)

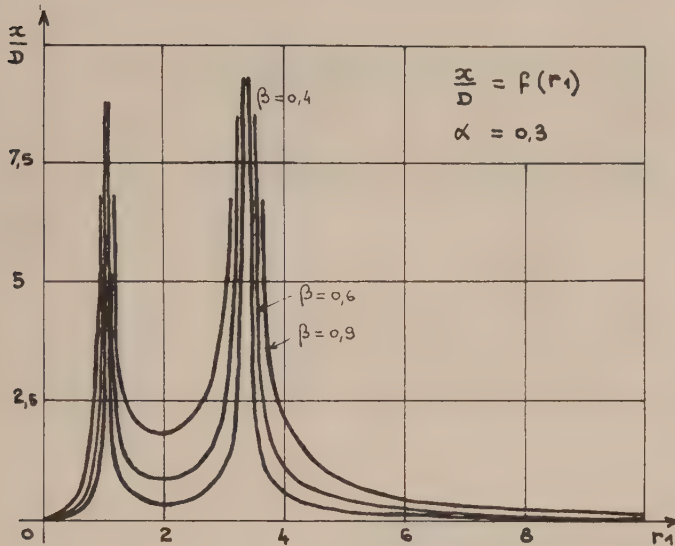


Fig 6

Quand  $\beta$  croît :

- L'amplitude  $U$  ou les amplitudes  $U_1$  et  $U_2$  augmentent
- A deux plages distinctes tend à se substituer une plage unique.

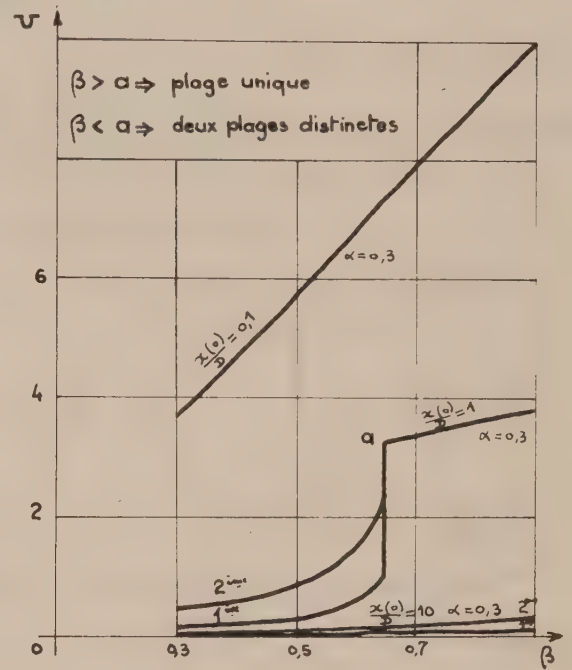


Fig 7

3,1,1,3 Conditions pour qu'il puisse exister deux valeurs de la vitesse de percussion pour un même  $r_1$  ( $\frac{x(0)}{D}$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $R$  et  $N$  constants)

Pour ce faire, il faut que

$$\left\{ \xi + \varepsilon \sqrt{\left[ \frac{D/x(0) \cdot \beta^2 r_1^2}{(1-r_1^2)(1-\alpha^2 r_1^2)} \right]^2 \left[ \left( \frac{1-R}{r_1} \right)^2 + \xi^2 \right] - \left( \frac{1-R}{r_1} \right)^2} \right\} \geq 0 \quad \forall \varepsilon = \pm 1$$

ce qui implique que :

1) l'expression sous le radical soit positive ou nulle

2)  $\xi > 0$  soit  $\left[ \frac{\alpha(\beta^2 - \alpha^2)}{\operatorname{tg} \psi_2} + \frac{1 - \beta^2}{\operatorname{tg} \psi_1} \right] > 0$

3)  $\xi - \sqrt{\quad} > 0$

Soit :

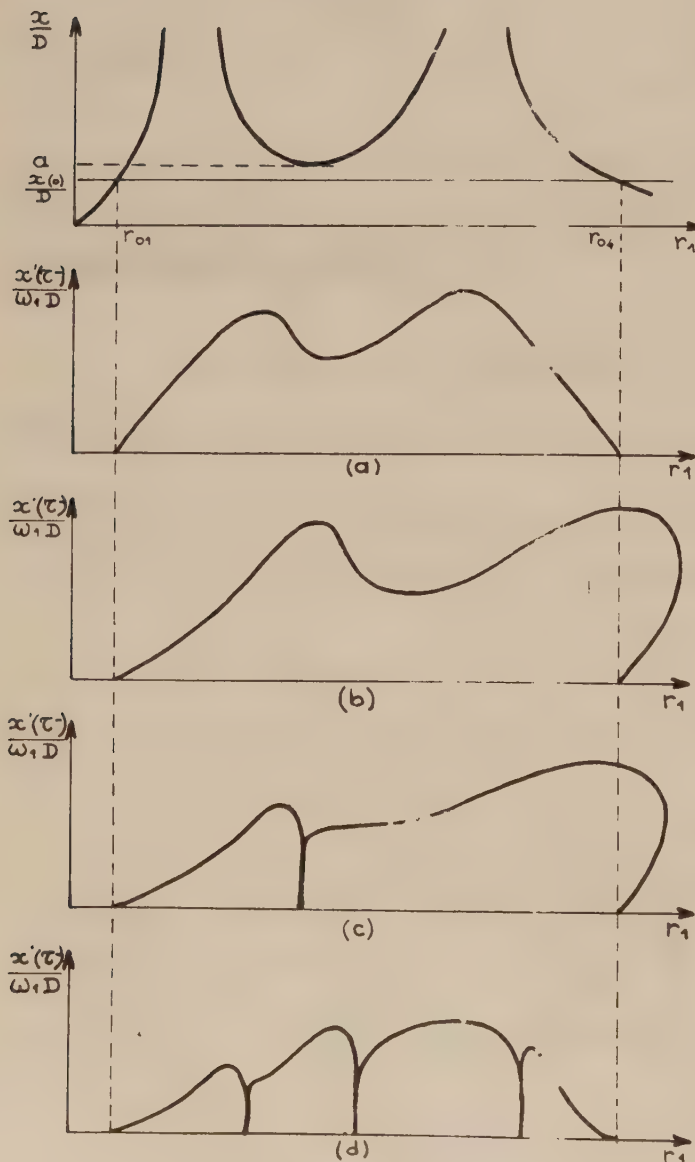
$$\left. \begin{array}{l} r_1^2 < r_{0,1}^2 \\ \text{ou } r_1^2 > r_{0,4}^2 \\ \text{ou } r_{0,2}^2 < r_1^2 < r_{0,3}^2 \end{array} \right\} \text{ cf } \S 3,1,1,1$$

ce qui signifie que les plages automatiques de percussions ne peuvent en aucun cas converger.

Remarque : Il est évident que les plages possibles seront limitées également par

- la valeur de décrochement  $r_1 = r_{1d}$
- la condition d'existence des percussions régulières

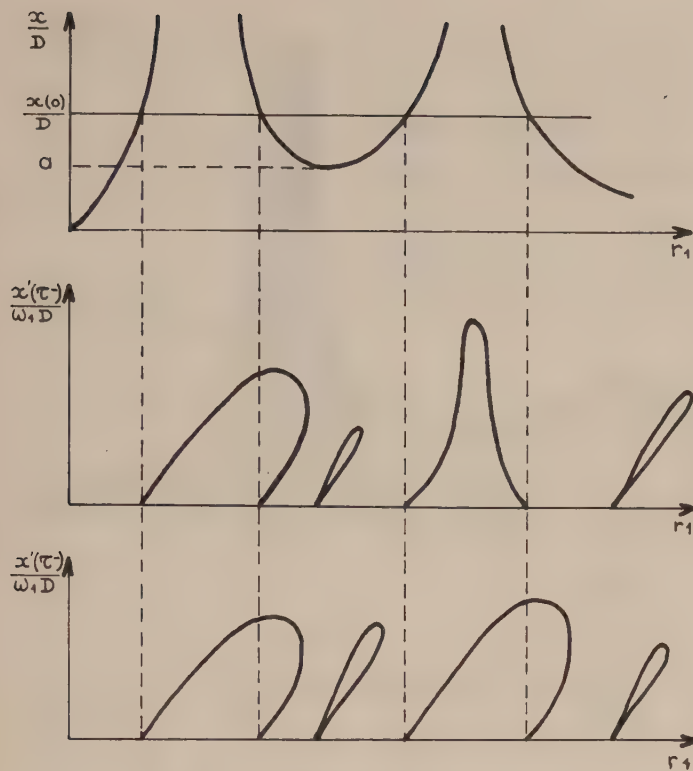
3,1,2 Influence de  $\frac{x(0)}{D}$



1er cas  $x(0) < a$

- + il existe une seule plage de percussions automatiques
- + il peut exister une seule plage semi-automatique et des plages non automatiques
- + si dans l'intervalle  $r_{01} r_{04}$   $\text{tg} \psi_1$  ou  $\text{tg} \psi_2$  s'annulent, la vitesse de percussion devient théoriquement nulle et les graphes peuvent présenter les allures de la Fig. 8 (c), (d). Cette remarque s'étend à l'ensemble des paramètres :  $R, N, \alpha$  et  $\beta$ .

Fig 8



2ème cas  $\frac{x(o)}{D} > a$

+ il existe deux plages de percussions automatiques

+ il peut exister :

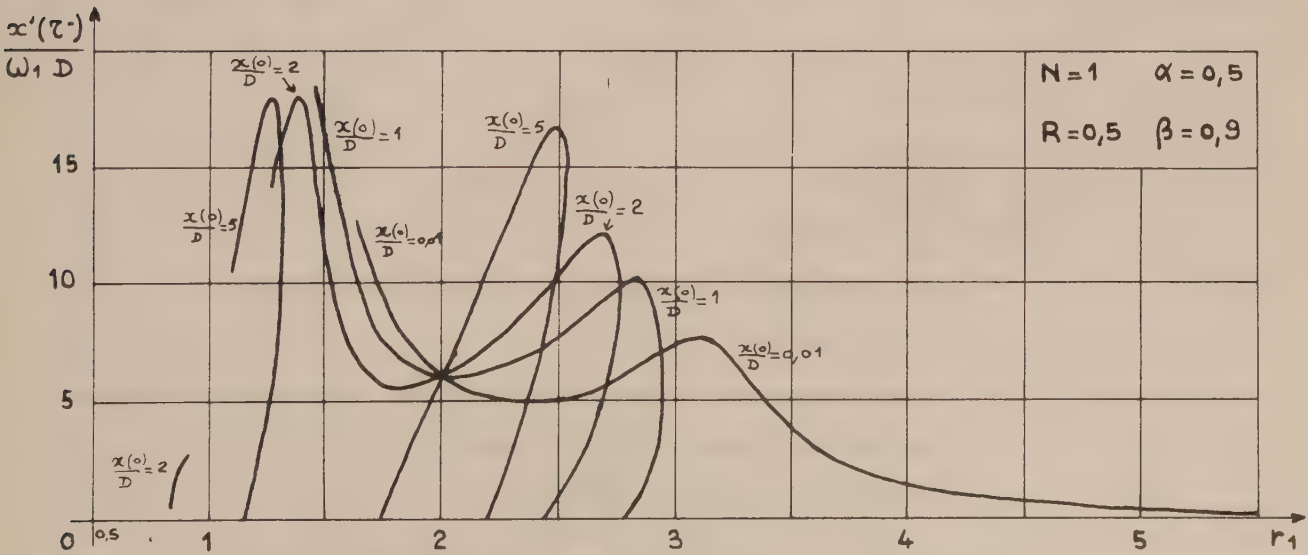
- une ou deux plages semi-automatiques

- des plages non-automatiques

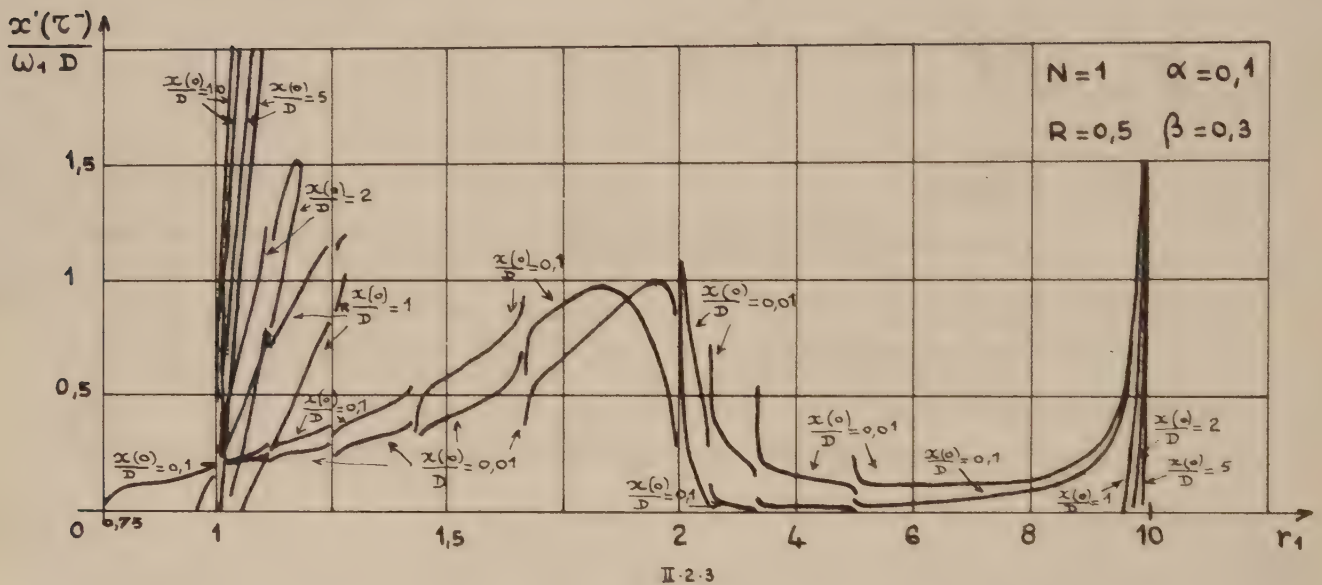
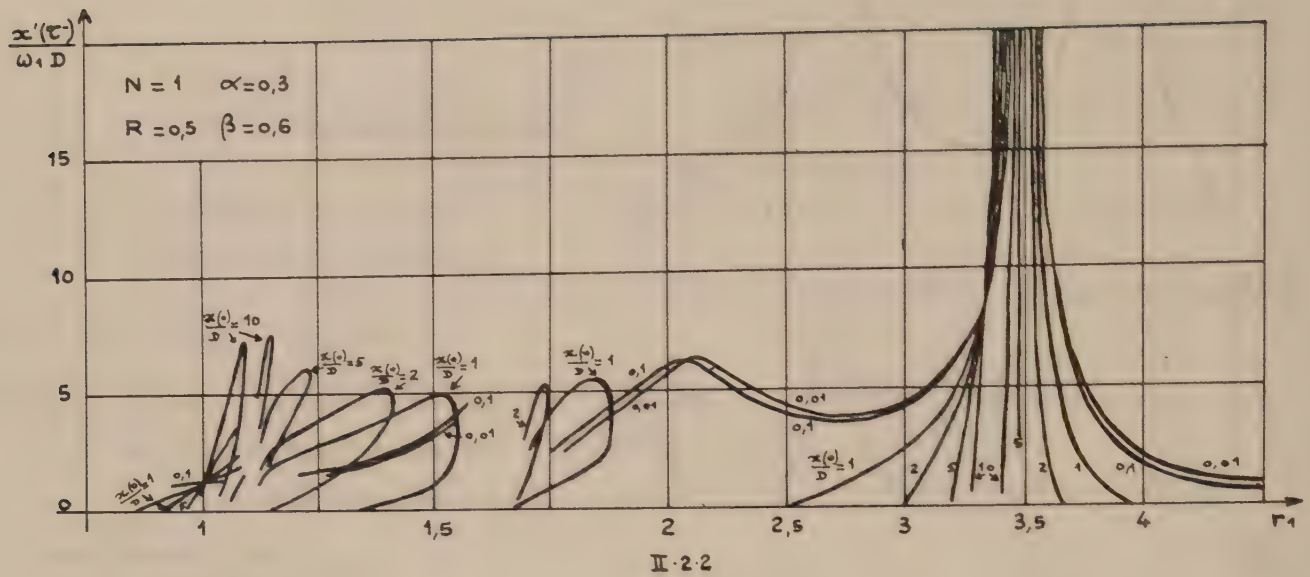
Fig 9

3, 1, 2, 2 Graphes

| $x(o)/D$          | N | R   | $\alpha$ | $\beta$ | $r_1$     | Graphe<br>n° |
|-------------------|---|-----|----------|---------|-----------|--------------|
| 0,01/1/2/5        | 1 | 0,5 | 0,5      | 0,9     | 0,5 - 5,5 | II-2-1       |
| 0,01/0,1/1/2/5/10 | 1 | "   | 0,3      | 0,6     | 0,75- 4,5 | 2            |
| "                 | 1 | "   | 0,1      | 0,3     | 0,75- 10  | 3            |
|                   |   |     |          |         |           |              |



II-2-1

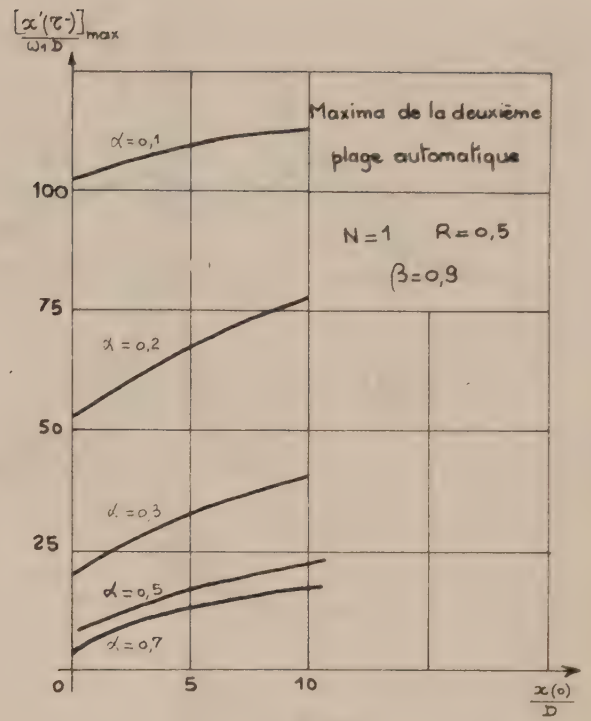
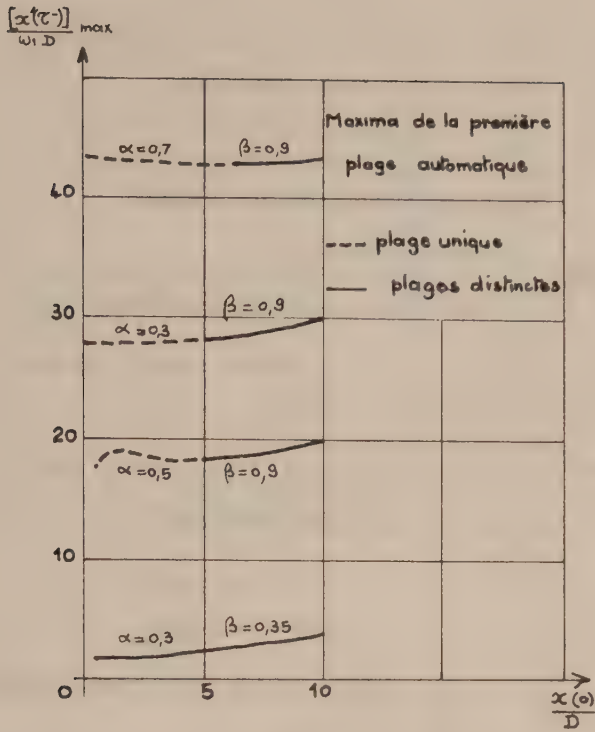


### 3,1,2,3 Lois générales

Quand  $\frac{x(o)}{D}$  croît :

- Les maxima de la vitesse de percussion varient (voir graphes 4 et 5).
- L'amplitude des plages de percussions semi-automatiques et non automatiques diminue ainsi que les valeurs de  $r_{ld}$  correspondant aux décrochements.

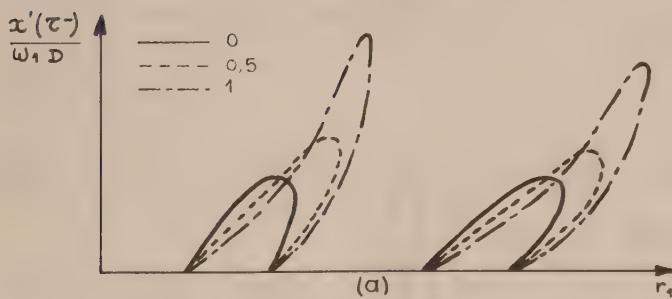
Les graphes 4 et 5 montrent pour diverses valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$ , l'influence de  $\frac{x(o)}{D}$  sur le maximum de la vitesse de percussion.



### 3,1,3 Influence de R

#### 3,1,3,1 Généralités

R est un coefficient compris entre 0 et 1



Les cas les plus caractéristiques de l'influence de R sont représentés sur les graphes de la Fig. 10.

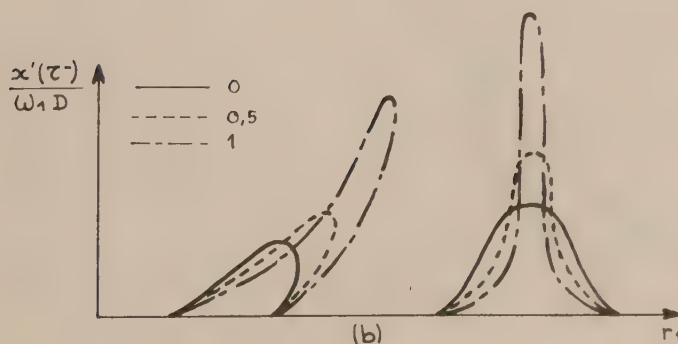


Fig 10

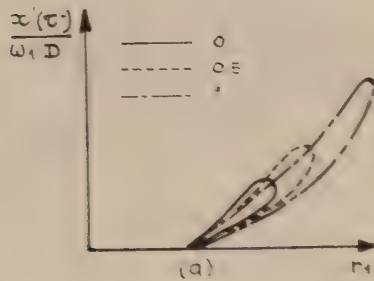
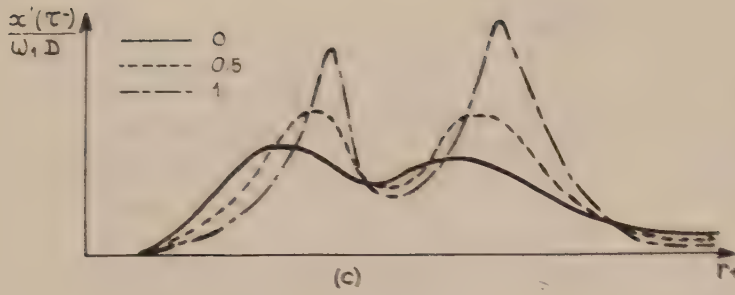


Fig 10

Tous les types de plages  
apparaissent.

(a), (b) : 2 plages automatiques

(c) : 1 seule plage automa-  
tique

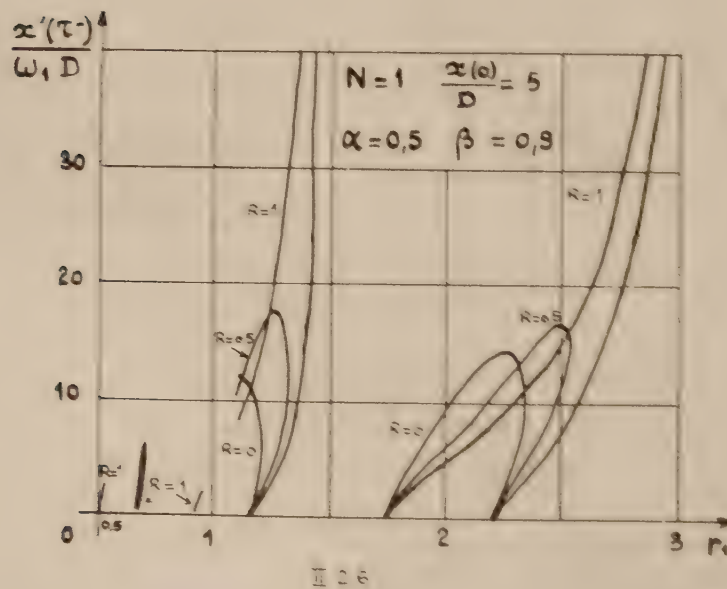
(d) : cas d'une plage non  
automatique

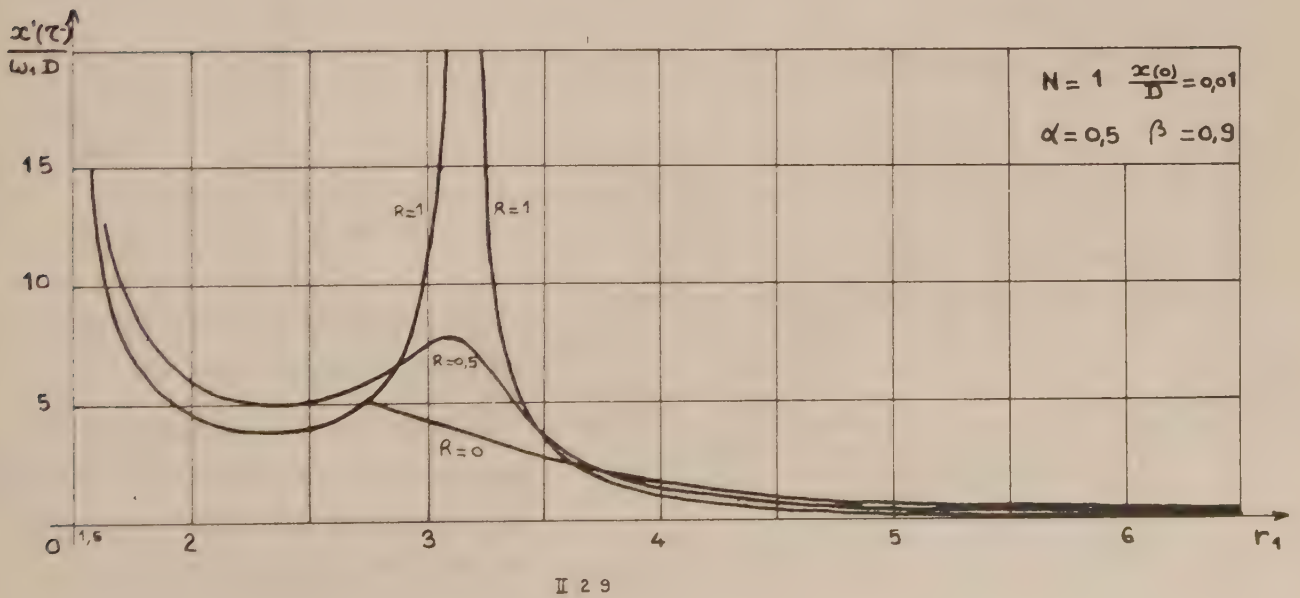
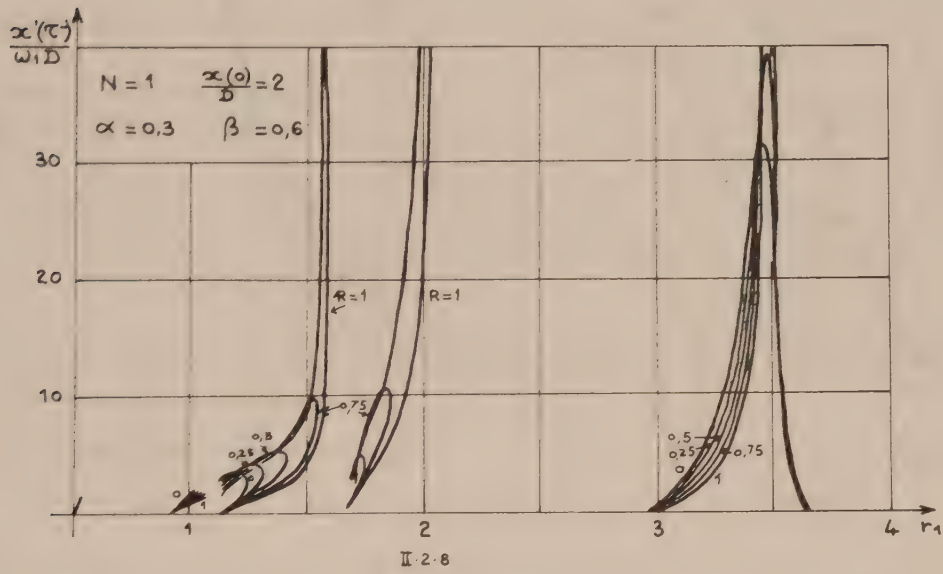
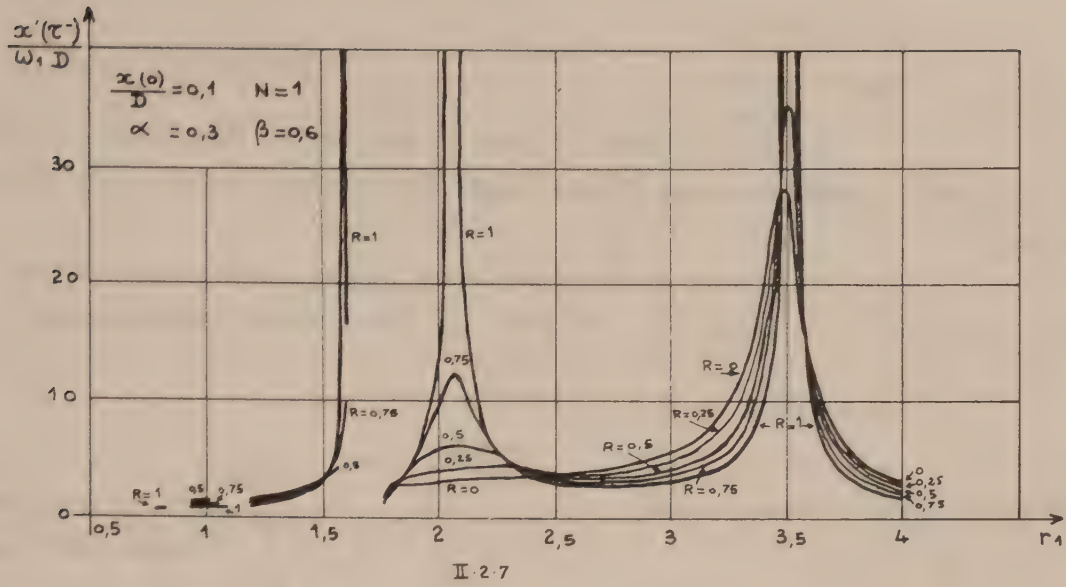
(a) : 2 plages semi-  
automatiques

(b) : 1 plage semi-automatique

### 3, 1, 3, 2 Graphes

| R                 | N | $\frac{x(0)}{D}$ | $\alpha$ | $\beta$ | $r_1$   | Graphe<br>$n^\circ$ |
|-------------------|---|------------------|----------|---------|---------|---------------------|
| 0/0,5/1           | 1 | 5                | 0,5      | 0,9     | 0,5-3   | II-2-6              |
| 0/0,25/0,5/0,75/1 | 1 | 0,1              | 0,3      | 0,6     | 0,5-4   | 7                   |
| "                 | 1 | 2                | "        | "       | 0,5-4   | 8                   |
| 0/0,5/1           | 1 | 0,01             | 0,5      | 0,9     | 0,5-6,5 | 9                   |
|                   |   |                  |          |         |         |                     |



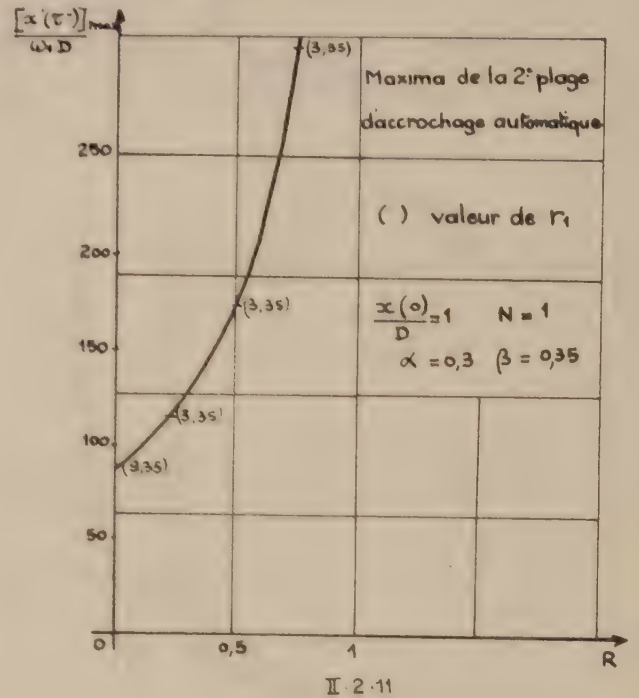
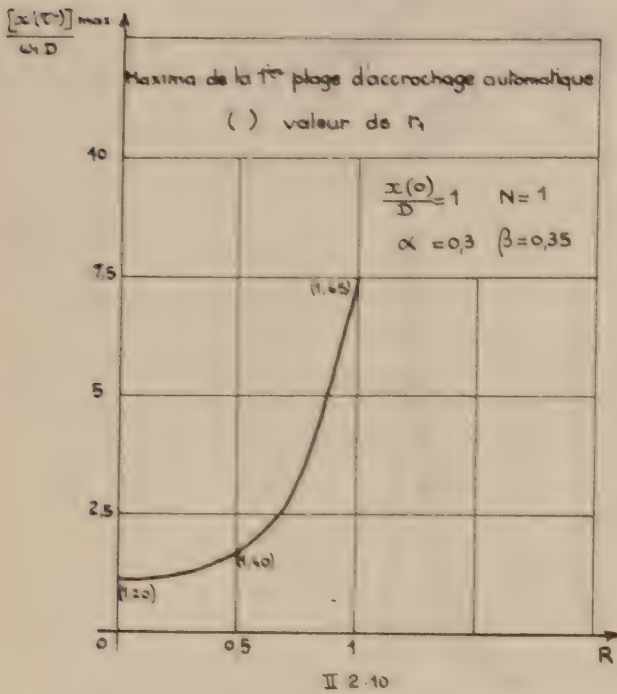


### 3, 1, 3, 3 Lois générales

Quand  $R$  croît :

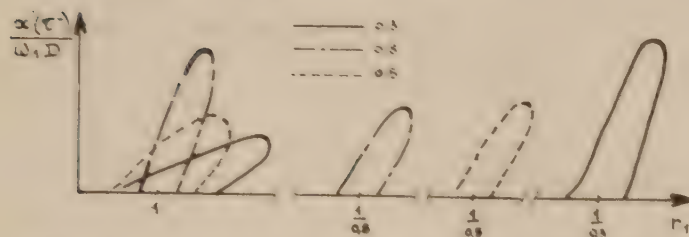
- les maxima de la vitesse de percussion augmentent. Ils se situent indifféremment dans une plage d'accrochage automatique, semi-automatique ou non automatique.
- les plages semi-automatiques ou non automatiques augmentent d'amplitude et par suite la valeur  $r_{1d}$  du point de décrochement correspondant croît.

Les graphes 10 et 11 illustrent ces lois :



### 3, 1, 4 Influence de alpha

#### 3, 1, 4, 1 Généralités



$$\alpha = \frac{\omega_1}{\omega_2} \text{ et } 0 < \alpha < 1$$

Les 2 pulsations de résonance se rapprochent quand  $\alpha$  croît.

Suivant que les deux plages de percussions sont distinctes ou non, nous obtenons les types de graphes représentés sur la Fig. 11.

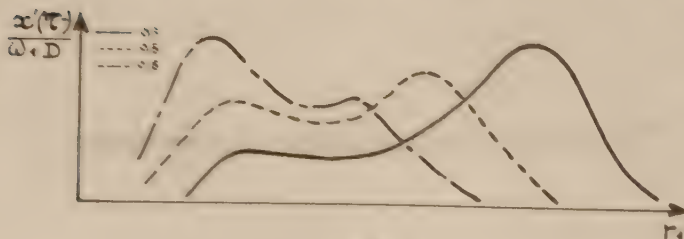
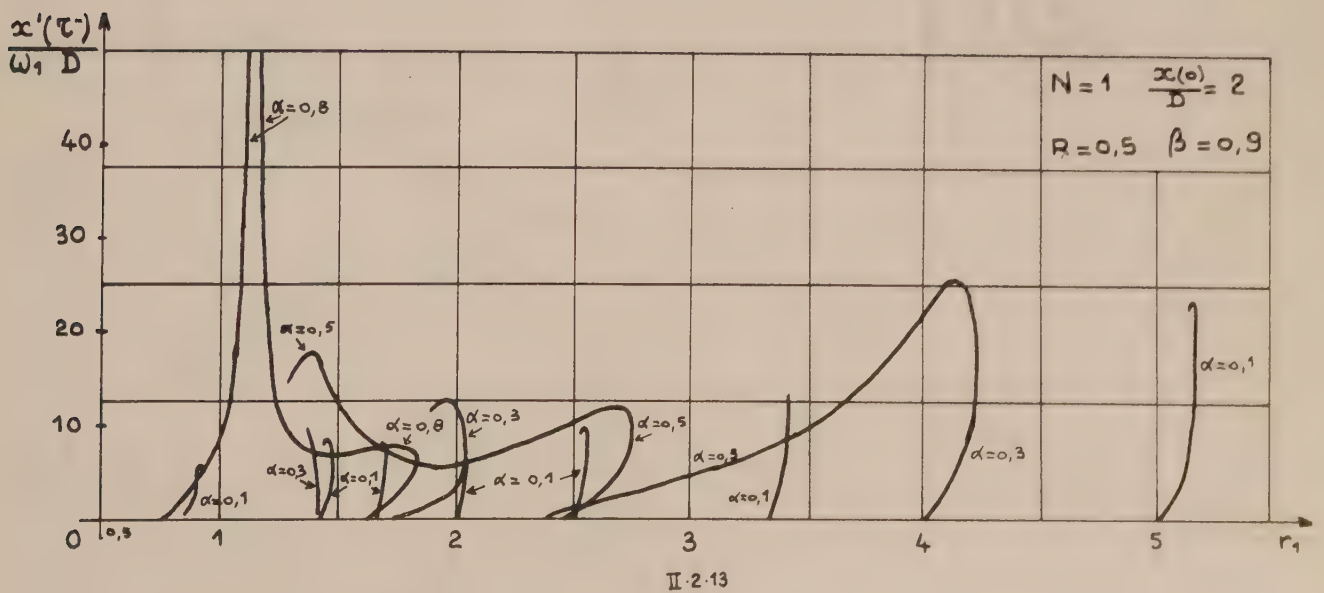
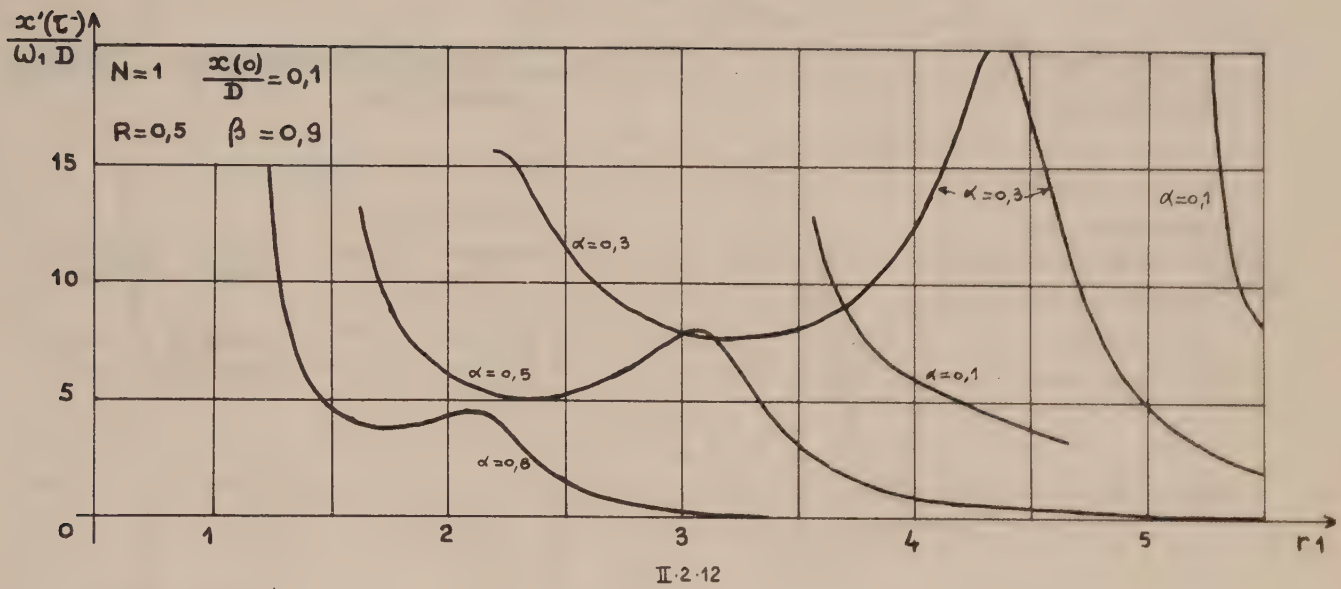
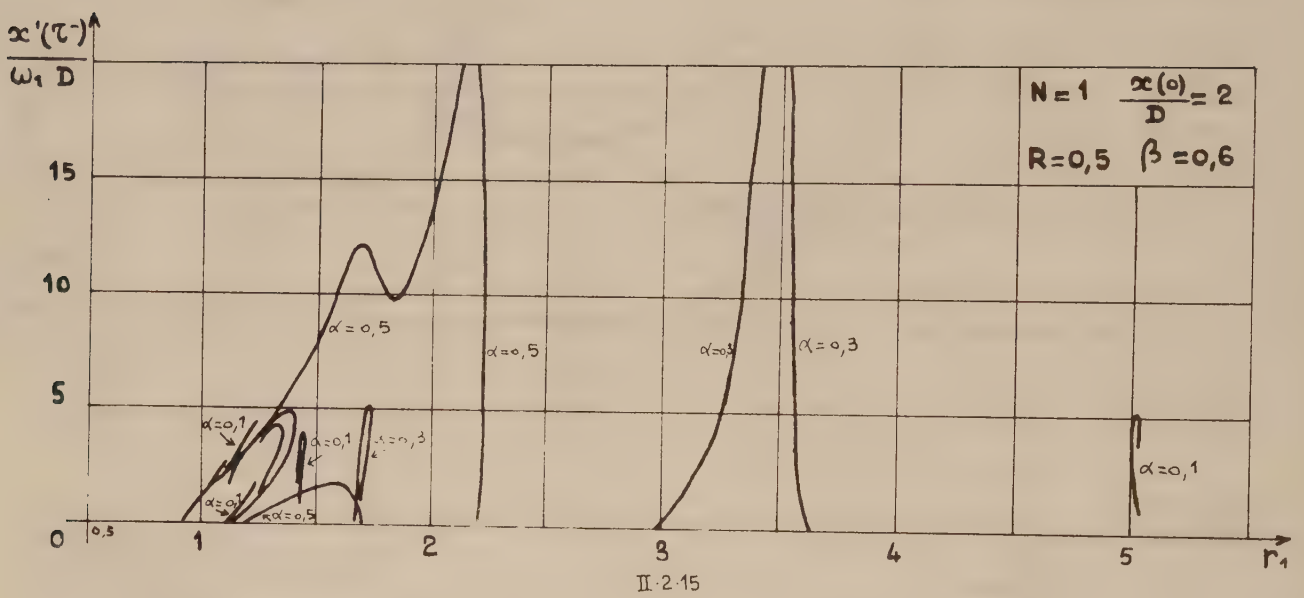
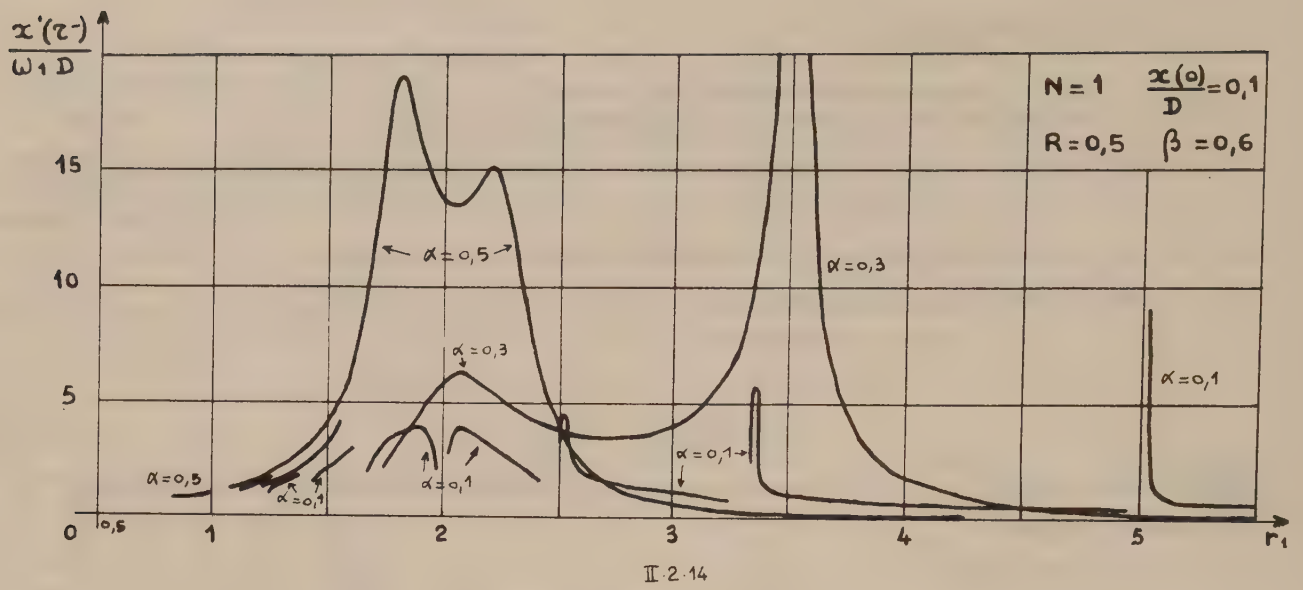


Fig. 11

3, 1, 4, 2 Graphes

| $\alpha$        | $N$ | $x(0)/D$ | $R$ | $\beta$ | $r_1$   | Graphe<br>$n^\circ$ |
|-----------------|-----|----------|-----|---------|---------|---------------------|
| 0,1/0,3/0,5/0,8 | 1   | 0,1      | 0,5 | 0,9     | 0,5-5,5 | II-2-12             |
| "               | 1   | 2        | "   | "       | "       | 13                  |
| 0,1/0,3/0,5     | 1   | 0,1      | "   | 0,6     | "       | 14                  |
| "               | 1   | 2        | "   | "       | "       | 15                  |
|                 |     |          |     |         |         |                     |





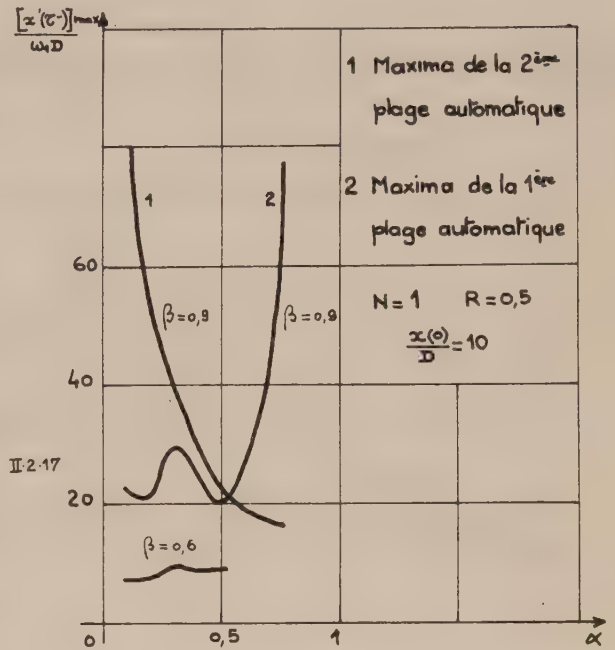
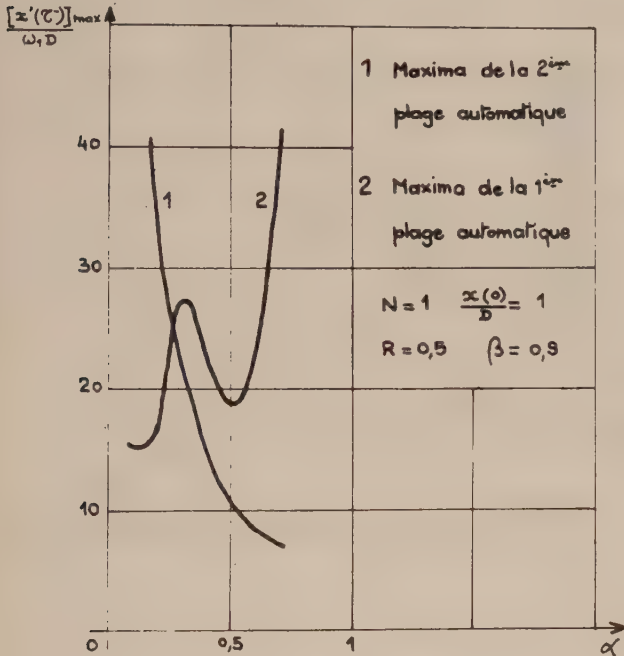
### 3,1,4,3 Lois générales

Quand  $\alpha$  croît :

- A deux plages de percussions distinctes (automatiques ou semi-automatiques) tend à se substituer une plage unique.

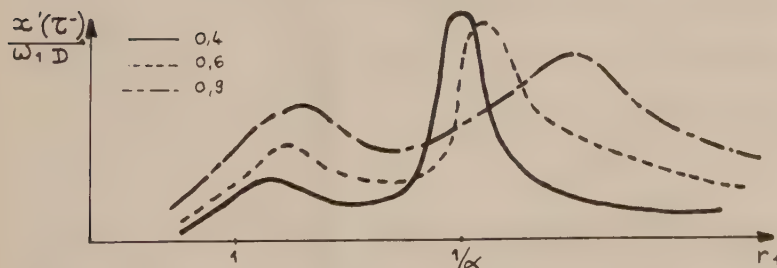
- Les maxima de la vitesse de percussion varient, ceux de la 2ème plage d'accrochage automatique diminuent.

Les graphes 16 et 17 illustrent les variations des maxima de la vitesse de percussion :



### 3,1,5 Influence de $\beta$

#### 3,1,5,1 Généralités



$$\beta = \frac{\omega_1}{\omega_{02}} \quad 0 < \alpha < \beta < 1$$

$\alpha$  étant constant,

les 2 pulsations propres du système sont également constantes.

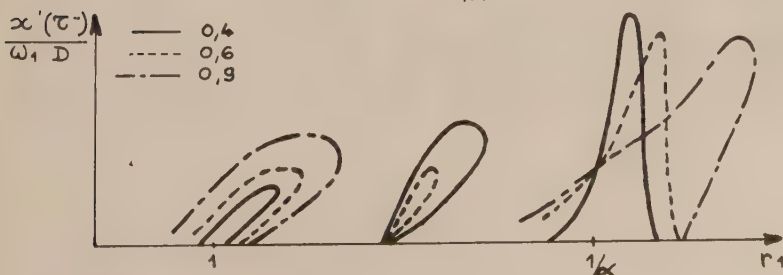
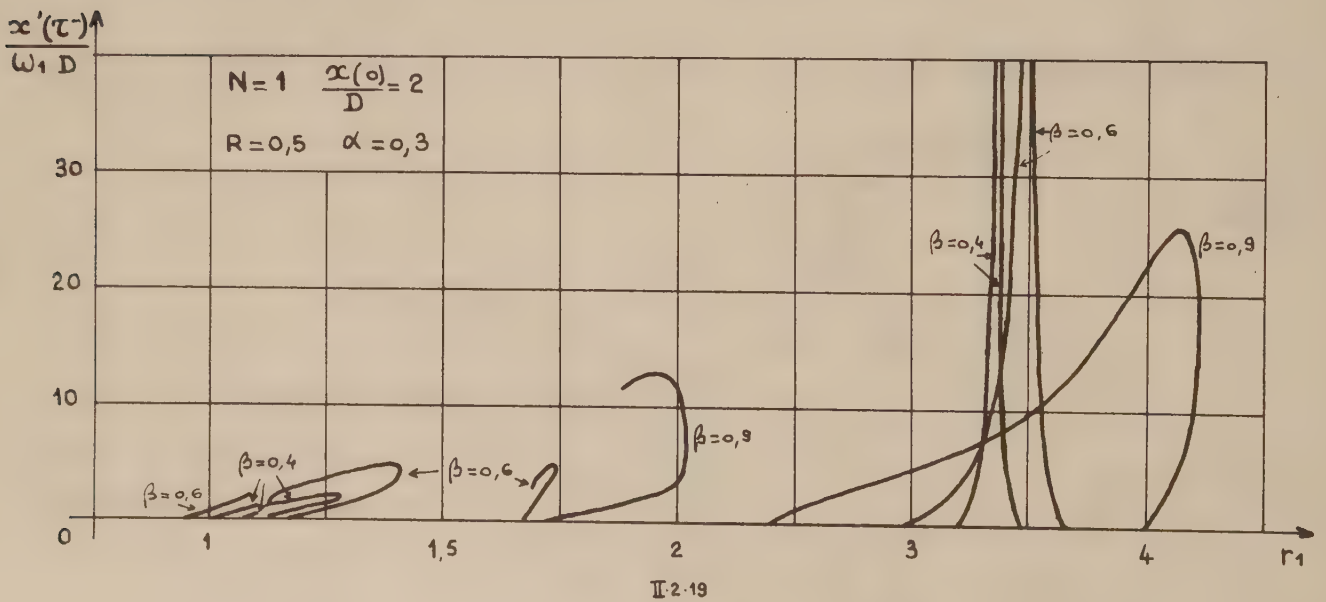
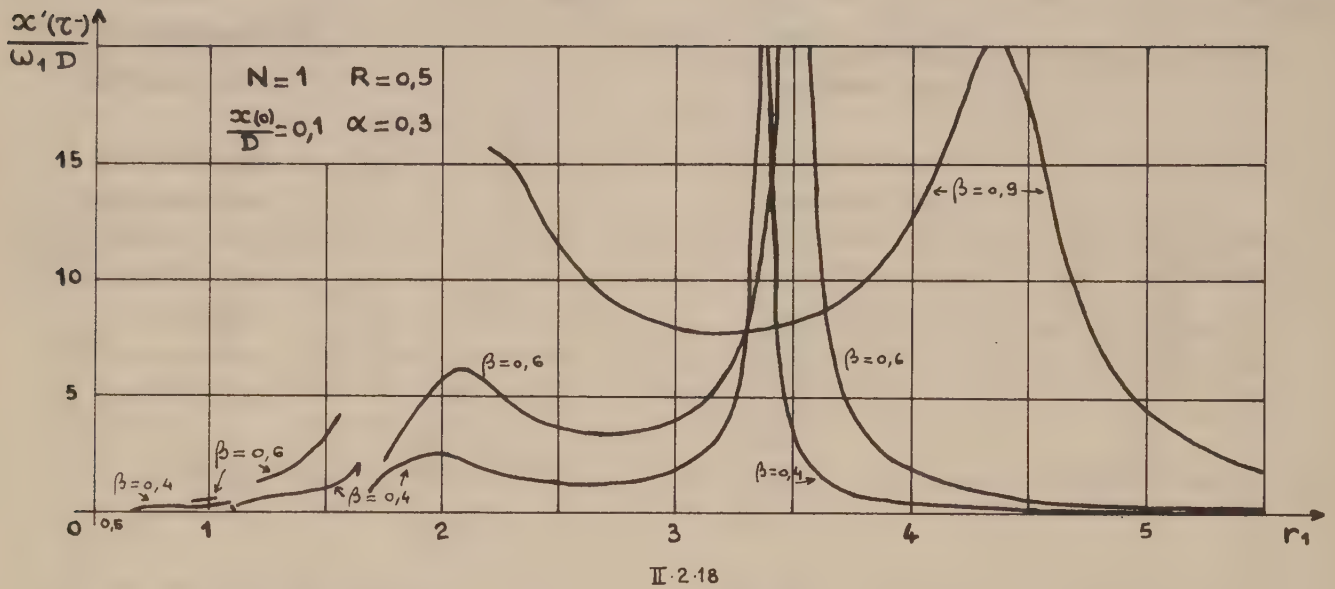
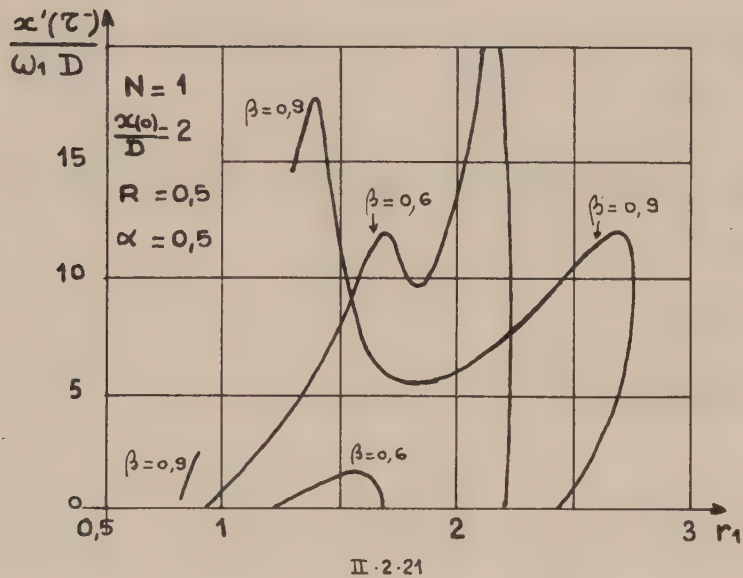
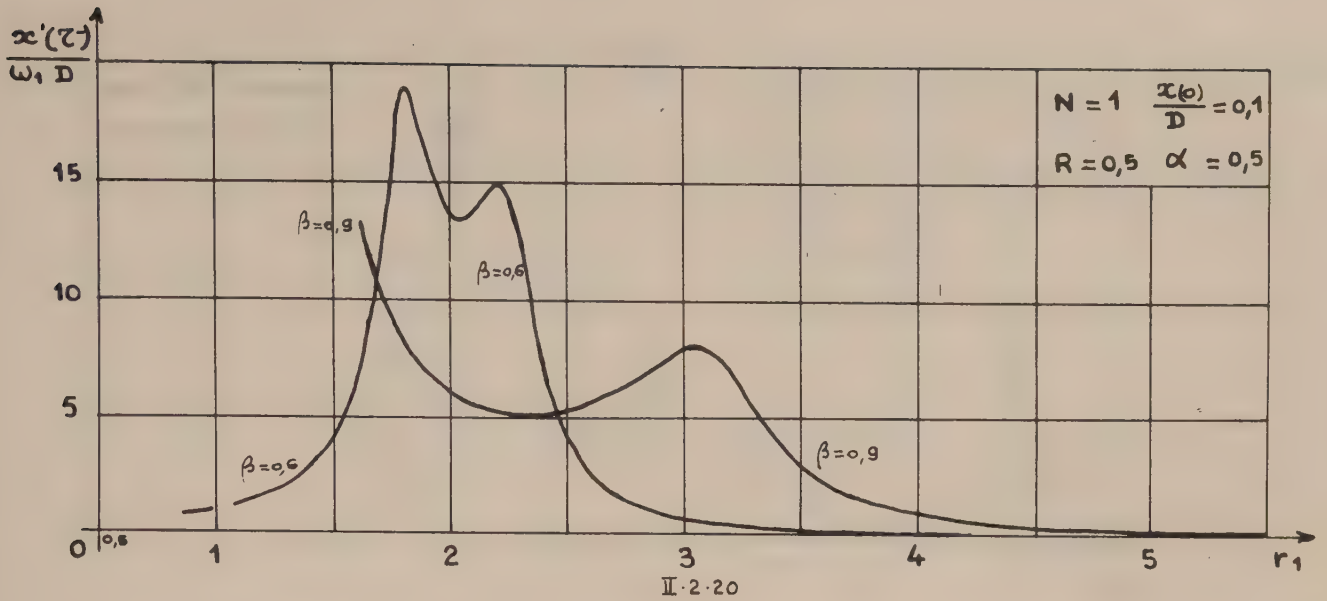


Fig 12

3,1,5,2 Graphes

| $\beta$     | $N$ | $x(0)/D$ | $R$ | $\alpha$ | $r_1$    | Graphe<br>$n^\circ$ |
|-------------|-----|----------|-----|----------|----------|---------------------|
| 0,4/0,6/0,9 | 1   | 0,1      | 0,5 | 0,3      | 0,5-5,5  | II-2-18             |
| "           | 1   | 2        | "   | "        | 0,75-4,5 | 19                  |
| 0,6/0,9     | 1   | 0,1      | "   | 0,5      | 0,5-5,5  | 20                  |
| 0,6/0,9     | 1   | 2        | "   | "        | 0,5-3    | 21                  |





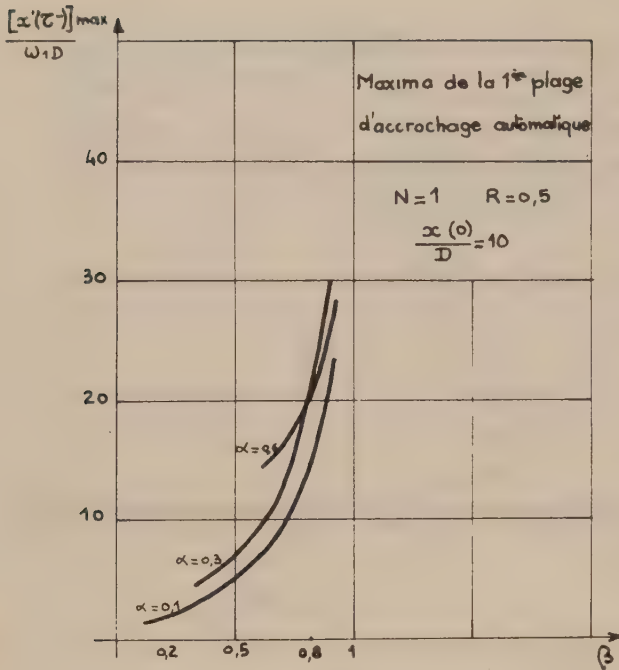
### 3,1,5,3 Lois générales

Quand  $\beta$  croît :

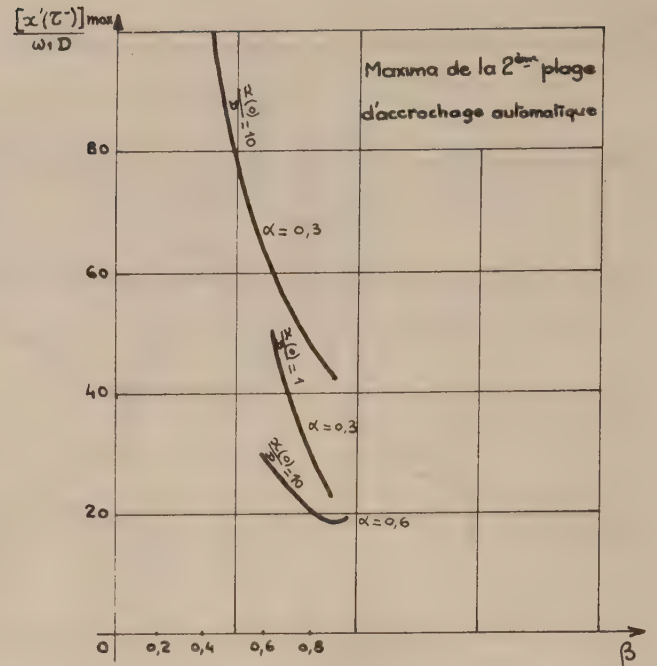
- le maximum de la vitesse de percussion :

- de la 1ère plage d'accrochage automatique, croît
- de la 2ème " " " , décroît

- à deux plages de percussions distinctes (automatiques ou semi-automatiques) tend à se substituer une plage unique qui augmente d'amplitude avec  $\beta$ .



II-2-22



II-2-23

Les graphes ci-dessus explicitent la variation du maximum de la vitesse de percussion, en fonction de  $\beta$ .

### 3, 1, 6 Influence de N

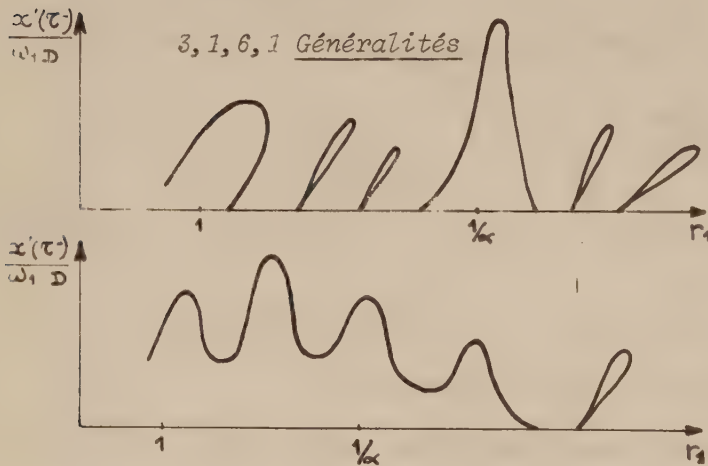
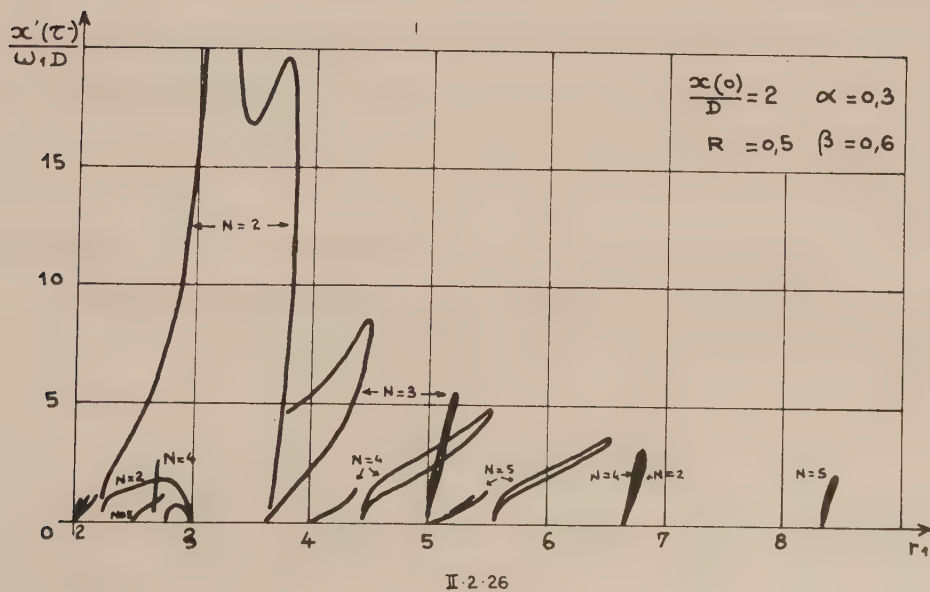
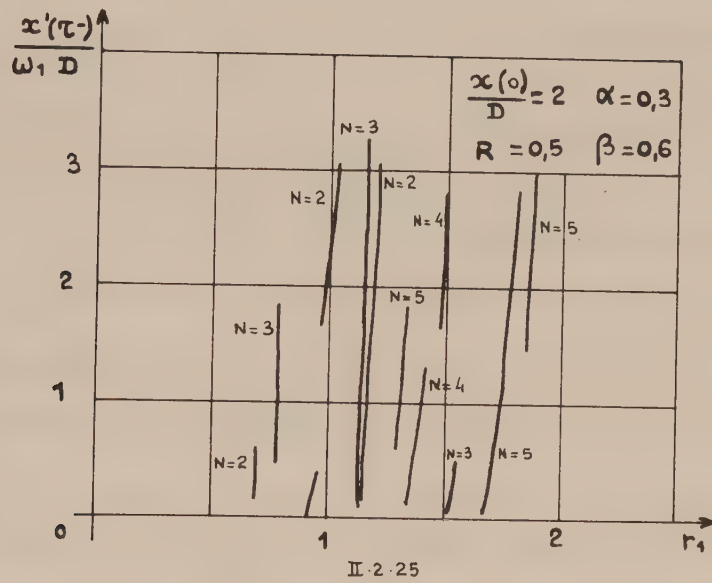
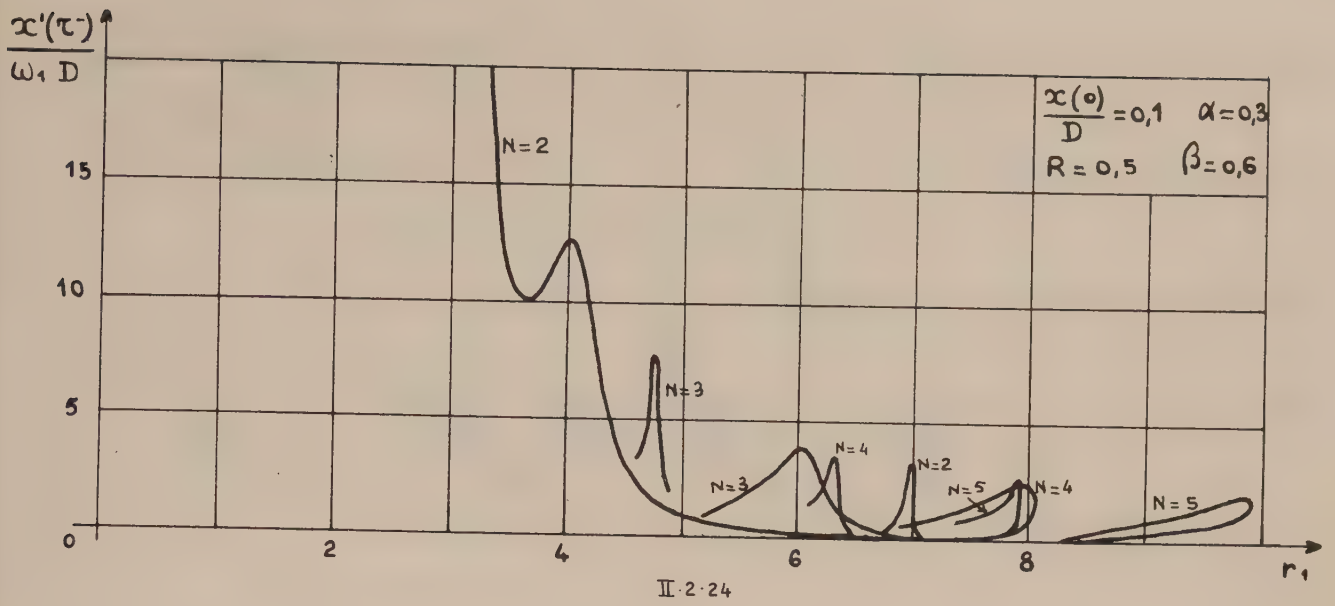


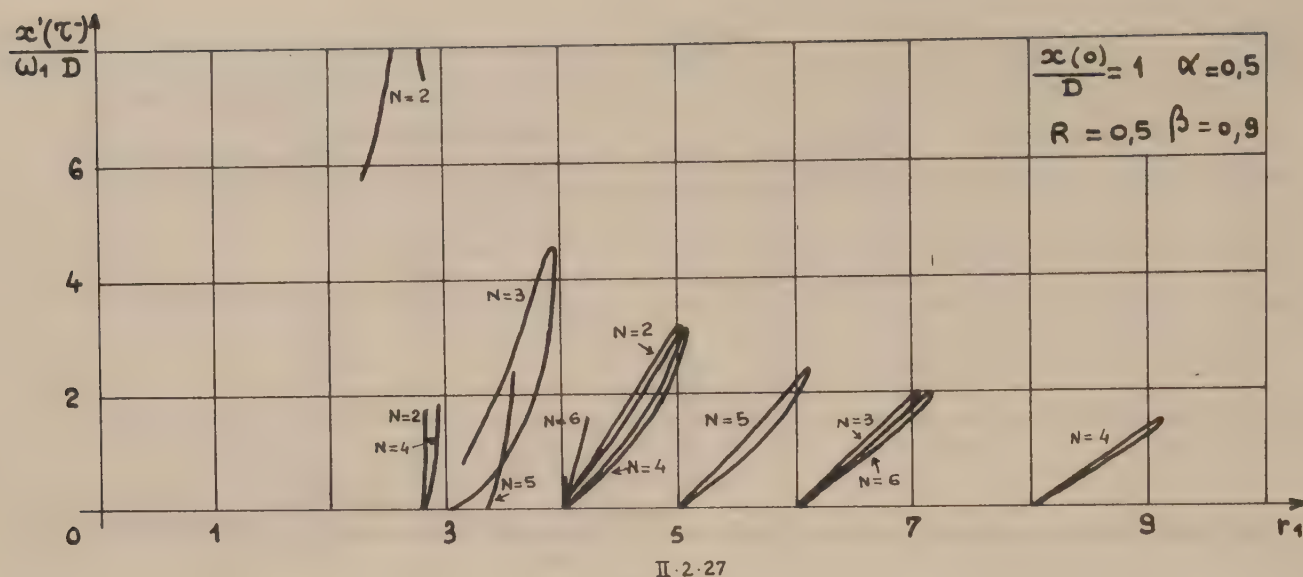
Fig 13

### 3, 1, 6, 2 Graphes

N est un nombre positif entier. La naissance des plages non automatiques est en général possible dès que  $r_1$  est égal ou supérieur à l'une de ses valeurs annulant  $\operatorname{tg} \psi_1$  ou  $\operatorname{tg} \psi_2$ , exceptions faites pour  $r_1 = 1$  et  $\alpha_{r_1} = 1$ .

| N         | $x(0)/D$ | R   | $\alpha$ | $\beta$ | $r_1$  | Grappe<br>n° |
|-----------|----------|-----|----------|---------|--------|--------------|
| 2/3/4/5/  | 0,1      | 0,5 | 0,3      | 0,6     | 0,5-10 | II-2-24      |
| "         | 2        | "   | "        | "       | 0,5-2  | 25           |
| "         | 2        | "   | "        | "       | 2-3    | 26           |
| 2/3/4/5/6 | 1        | "   | 0,5      | 0,9     | 0,5-10 | 27           |
| :         | :        | :   | :        | :       | :      | :            |





### 3,1,6,3 Lois générales

Quand N croît :

- le nombre de plages non automatiques augmente.
- le maximum de la vitesse de percussion de la lère plage d'accrochage automatique, croît.

### 3,1,7 Remarques

- Dans les généralités, les figures ne représentent qu'une schématisation de principe de  $\frac{x'(\tau^-)}{\omega_1 D} = f(r_1)$  en fonction du paramètre étudié, pour permettre ensuite une analyse plus aisée des graphes. Il n'est pas toujours tenu compte de l'annulation de la vitesse de percussion quand  $\text{tg}\psi_1$  ou  $\text{tg}\psi_2 = 0$ , ni de la 2<sup>o</sup> condition de régularité des percussions.

Cette remarque s'appliquera également au § 3,2.

- Sur les graphes représentatifs du maximum de la vitesse de percussion en fonction de tel ou tel paramètre, la 2<sup>o</sup> condition de régularité des percussions est exclue (cf. graphes n° 4-5-10-11-16-17-22-23).

- Les lois générales sont volontairement très limitatives dans leurs exposés, l'ensemble des lois essentielles se dégageant directement de l'analyse des graphes présentés.

### 3,2 L'interstice est négatif

Les ressorts sont initialement comprimés

#### 3,2,1 Préliminaire

##### 3,2,1,1 Plages de percussions automatiques

Les percussions ne seront automatiques que lorsque le percuteur réussira à se "décoller" de la butée.

Soit  $x(o)$  l'interstice et  $x_2(o)$  la position de la masse excitatrice :  $k_2 x_2(o) = k_1 [x(o) - x_2(o)]$  d'où  $x_2(o) = \frac{k_1}{k_1 + k_2} x(o)$

Avant percussions, l'équation du mouvement est :

$$m_2 x''_2 + (k_1 + k_2) x_2 = m_b a \Omega^2 \cos(\Omega t)$$

dont la solution, en régime forcé, est de la forme :

$$x_2 = \frac{d}{1-r^2} \cos \Omega t \quad \text{avec} \quad d = \frac{m_b a \Omega^2}{k_1 + k_2}, \quad r = \frac{\Omega}{\omega_o}, \quad \omega_o^2 = \frac{k_1 + k_2}{m_2}$$

Dès que l'amplitude du déplacement de la masse excitatrice devient supérieure à  $x(o) - x_2(o)$  les percussions existent, c'est-à-dire pour :

$$r_1^2 \geq \frac{-\frac{x(o)}{D}}{\beta^2 \left(1 - \frac{x(o)}{D} C\right)}$$

$$r_1^2 \leq \frac{\frac{x(o)}{D}}{\beta^2 \left(1 + \frac{x(o)}{D} C\right)} \quad \text{si } 1 < -\frac{x(o)}{D} C$$

$$\text{avec } C = \frac{\alpha^2}{\beta^2 (1 + \alpha^2 - \beta^2)}$$

#### 3,2,1,2 Conditions pour qu'il puisse exister 2 valeurs de la vitesse de percussion pour une même valeur de $r_1$ ( $N, \frac{x(o)}{D}, R, \alpha, \beta$ fixés)

La discussion est analogue à celle de l'interstice positif, avec

ici :

$$\left\{ \xi + \epsilon \sqrt{\left[ \frac{(D/x(o))^2 \beta^2 r_1^2}{(1-r_1^2)(1-\alpha^2 r_1^2)} \right]^2 \left[ \left( \frac{1-R}{r_1} \right)^2 + \xi^2 \right] - \left( \frac{1-R}{r_1} \right)^2} \right\} \leq 0 \quad \text{quel que soit } \epsilon = \pm 1$$

1) L'expression sous le radical doit être positive ou nulle

$$2) \xi < 0 \quad \text{d'où} \quad \left[ \frac{\alpha(\beta^2 - \alpha^2)}{\operatorname{tg} \psi_2} + \frac{1 - \beta^2}{\operatorname{tg} \psi_1} \right] < 0$$

$$3) \xi + \sqrt{\quad} < 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{soit } r_1^2 < r_{01}^2 \\ \text{ou } r_1^2 > r_{04}^2 \\ \text{ou } r_{02}^2 < r_1^2 < r_{03}^2 \end{array} \right\} \text{ cf } \S 3,1,1,1$$

même remarque que § 3,1,3

### 3,2,2 Influence de $\frac{x(0)}{D}$

#### 3,2,2,1 Généralités

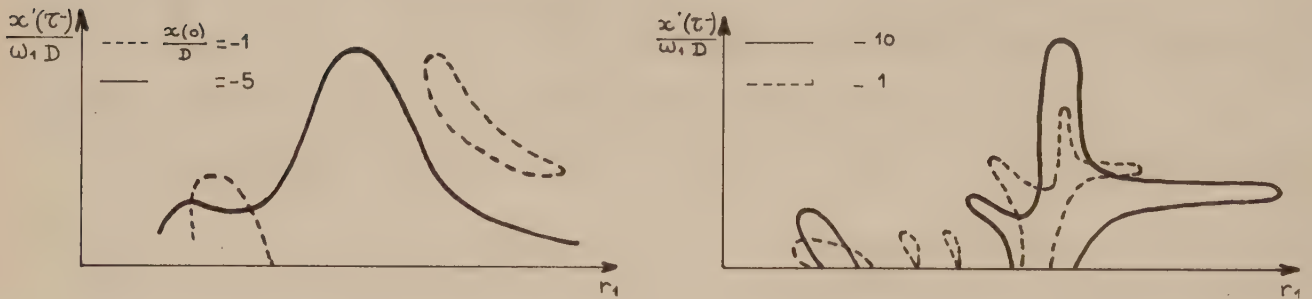
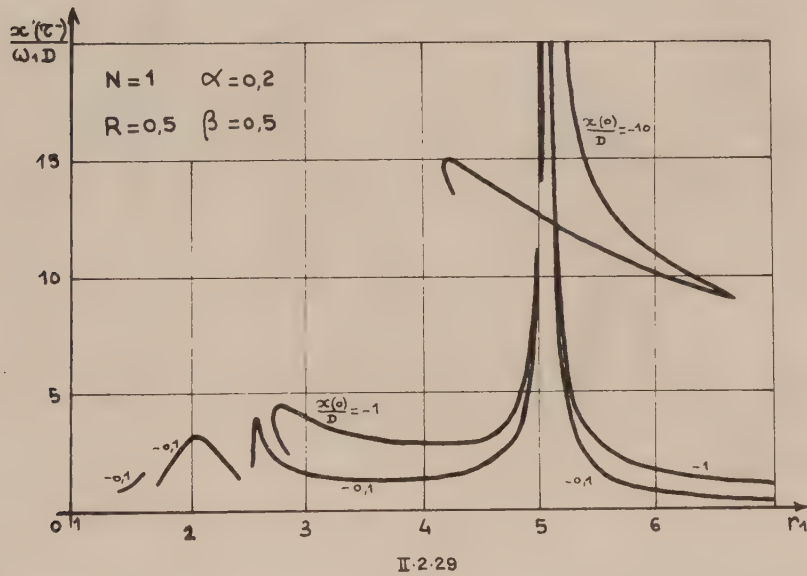
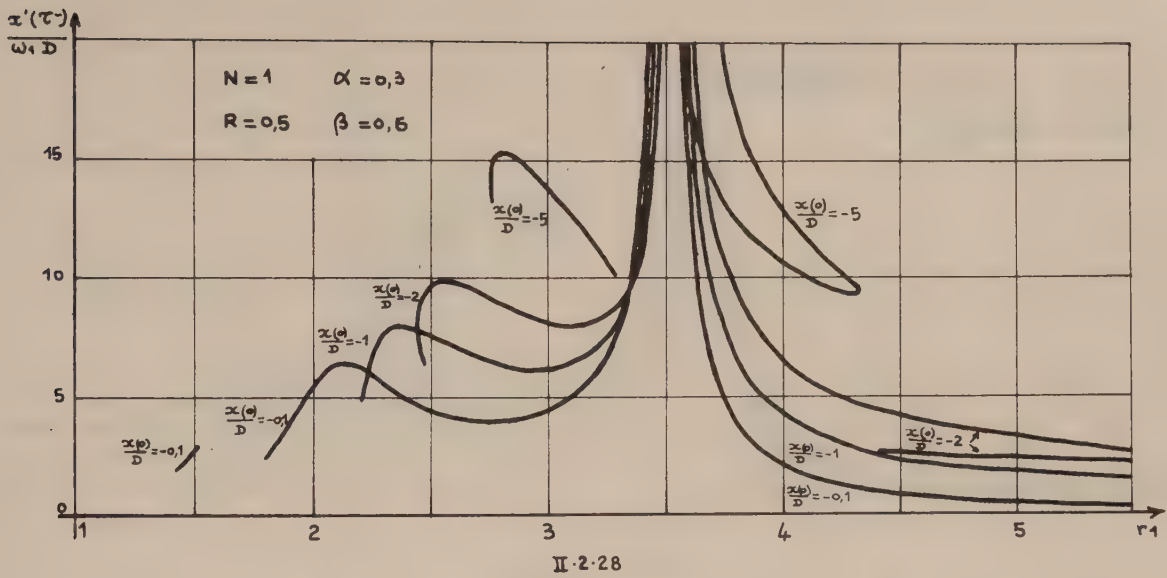


Fig 14

#### 3,2,2,2 Graphes

| $x(0)/D$      | N | R   | $\alpha$ | $\beta$ | $r_1$ | Graphe<br>n° |
|---------------|---|-----|----------|---------|-------|--------------|
| -0,1/-1/-2/-5 | 1 | 0,5 | 0,3      | 0,6     | 1/5,5 | II-2-28      |
| -0,1/-1/-10   | 1 | 0,5 | 0,2      | 0,5     | 1/7   | 29           |



### 3,2,2,3 Lois générales

Quand  $\frac{x(0)}{D}$  décroît :

- la plage automatique diminue d'amplitude, et des plages en boucles prennent naissance pour  $\text{tg } \psi_1$  ou  $\text{tg } \psi_2 = 0$ .

- Les maxima de la vitesse de percussion varient.

### 3,2,3 Influence de R

#### 3,2,3,1 Généralités

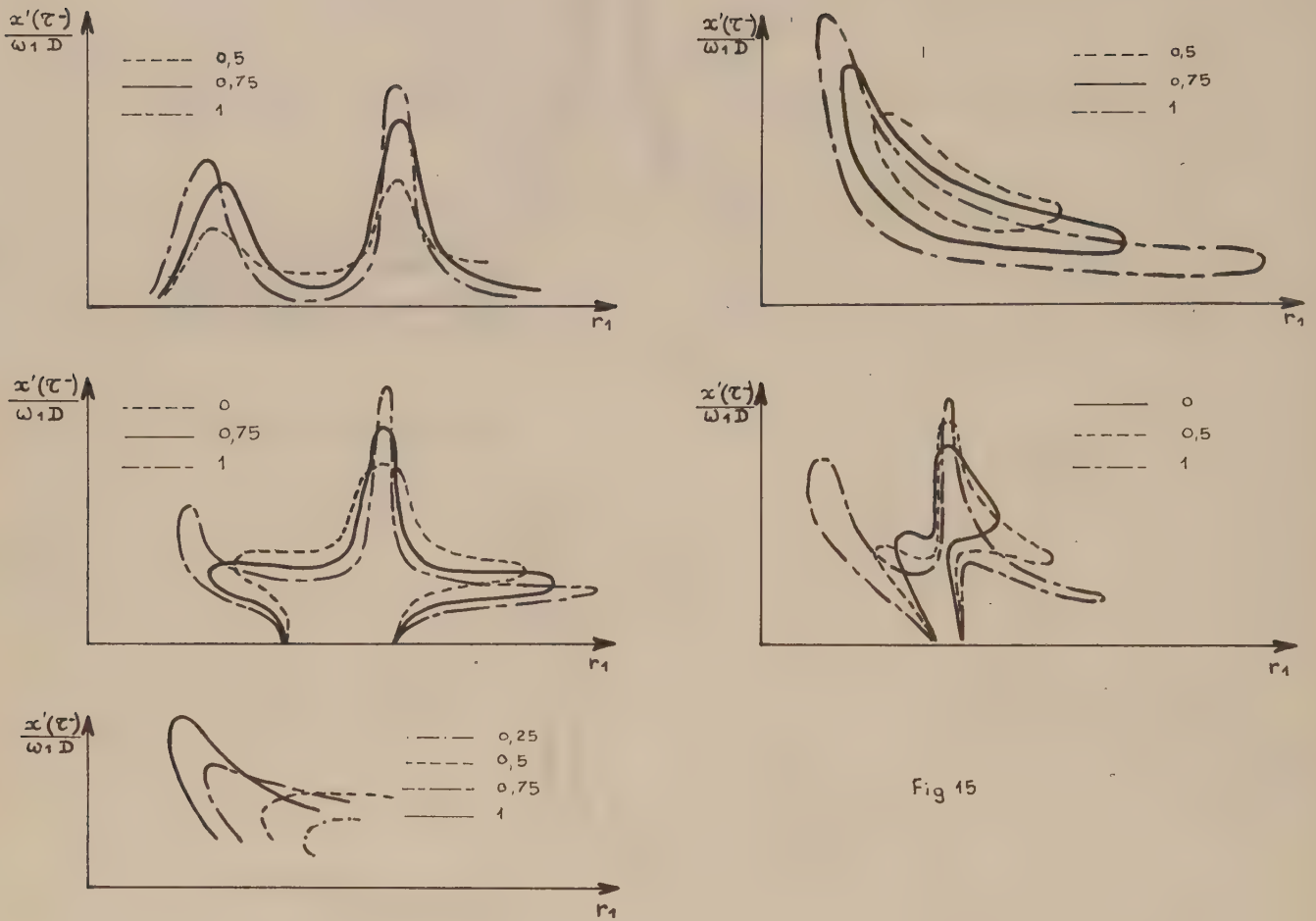
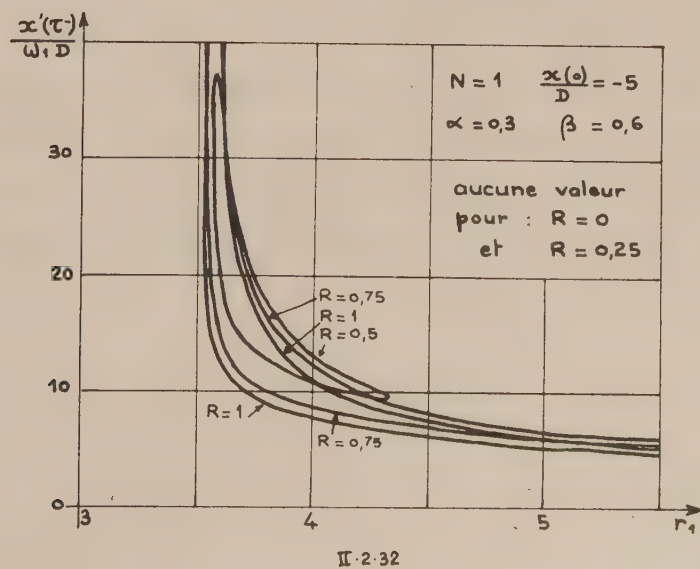
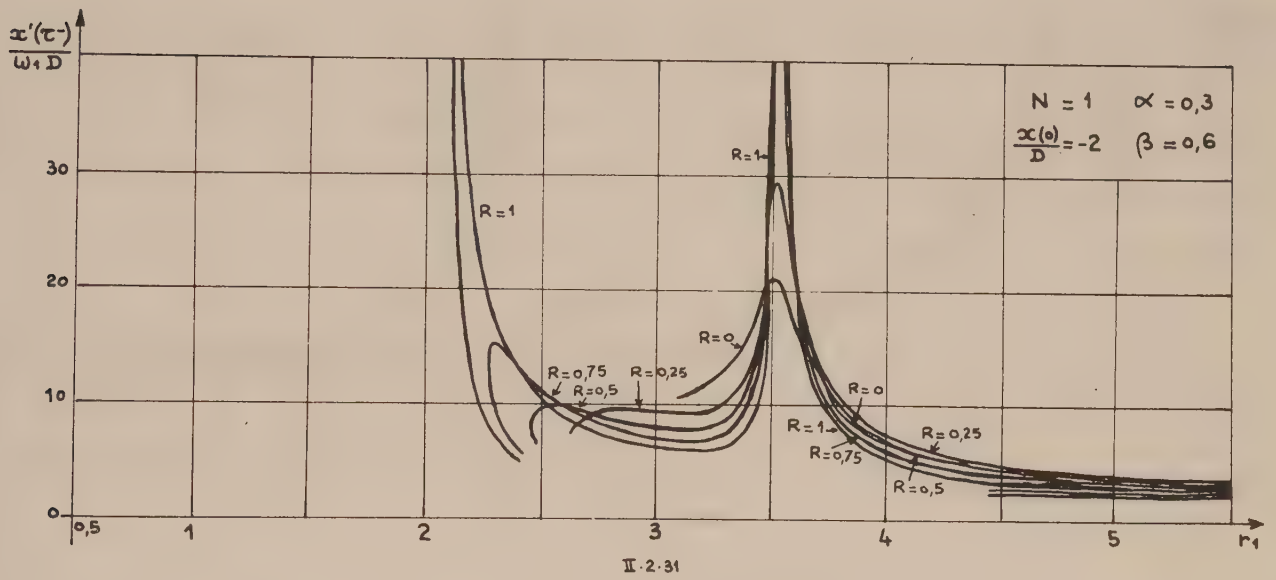
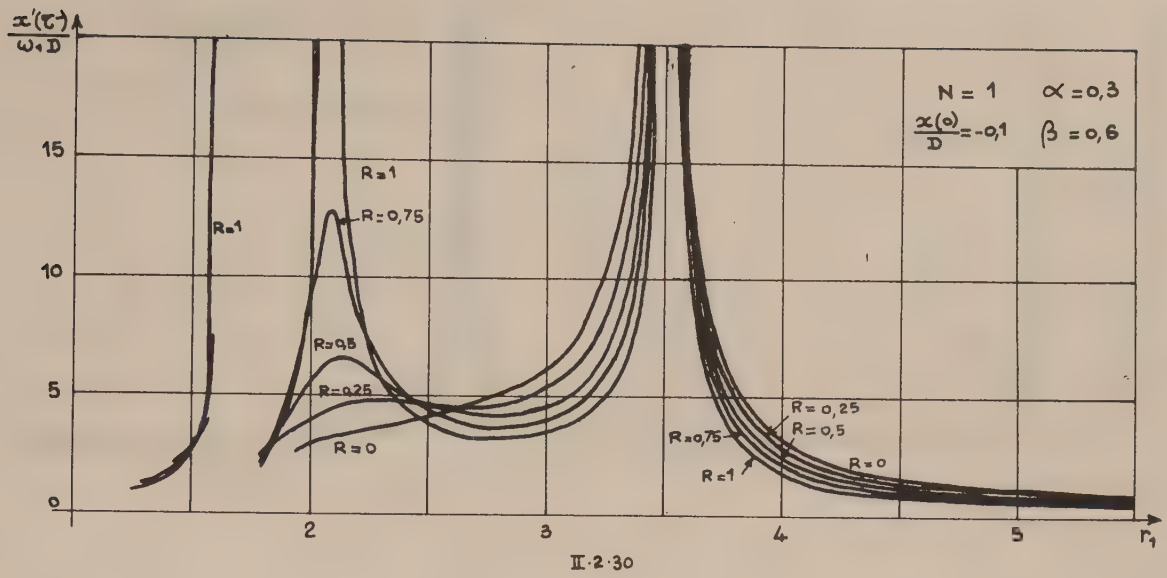
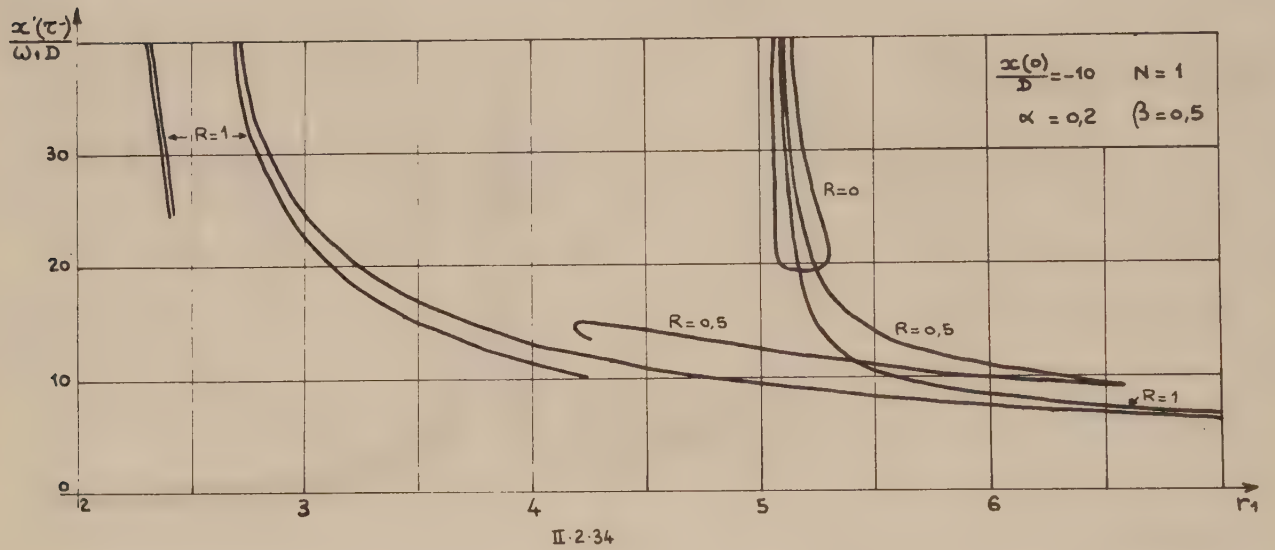
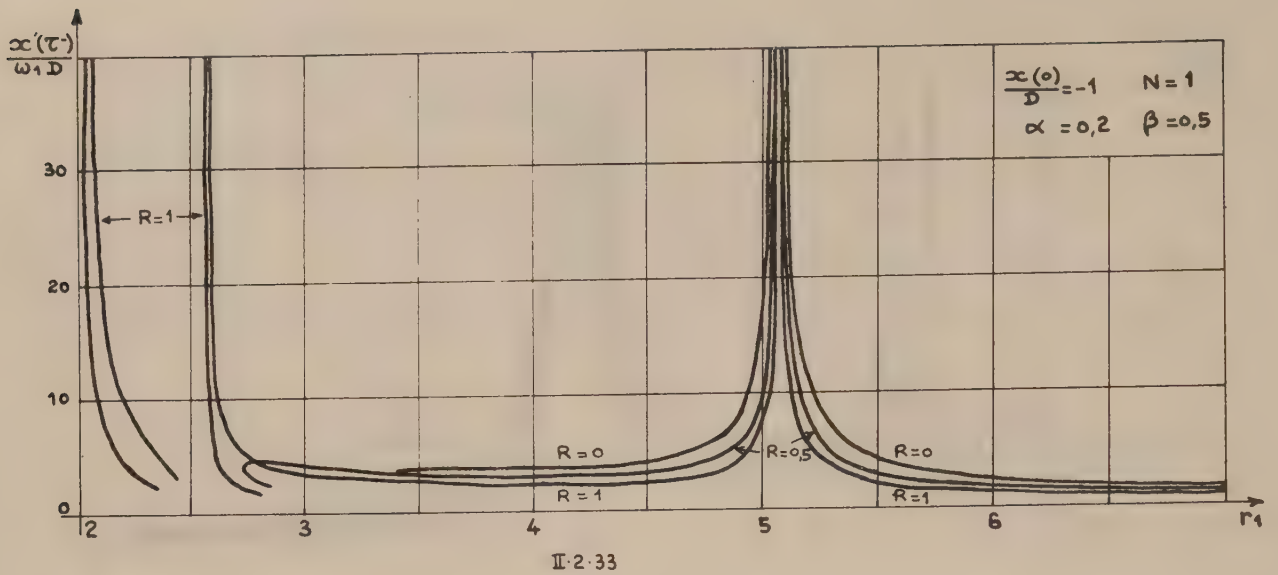


Fig 15

#### 3,2,3,2 Graphes

| R                 | $x(0)/D$ | N | $\alpha$ | $\beta$ | $r_1$   | Graphe<br>n° | Observations                 |
|-------------------|----------|---|----------|---------|---------|--------------|------------------------------|
| 0/0,25/0,5/0,75/1 | -0,1     | 1 | 0,3      | 0,6     | 1 - 5,5 | II-2-30      |                              |
| "                 | -2       | 1 | "        | "       | 0,5-5,5 | 31           |                              |
| "                 | -5       | 1 | "        | "       | 3-5,5   | 32           |                              |
| 0/0,5/1           | -1       | 1 | 0,2      | 0,5     | 2 - 7   | 33           | pas de valeur<br>entre 0,5-2 |
| "                 | -10      | 1 | "        | "       | " "     | 34           | " "                          |





### 3,2,3,3 Lois générales

Quand  $R$  croît :

- les maxima de la vitesse de percussion augmentent, les  $r$  correspondants croissent ou décroissent suivant les plages de percussions.

- s'il existe une double valeur de la vitesse de percussion pour un même  $r_1$ , la valeur  $r_{1d}$  du point de décrochement diminue.

### 3,2,4 Influence de $\alpha$

#### 3,2,4,1 Généralités

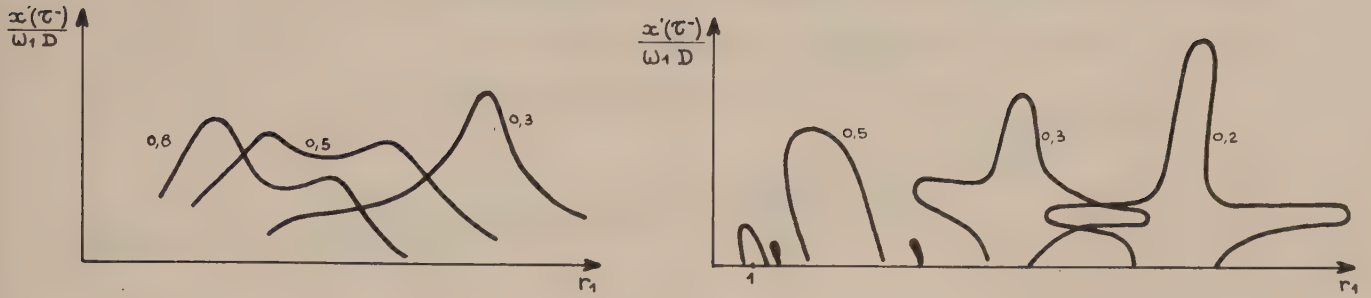
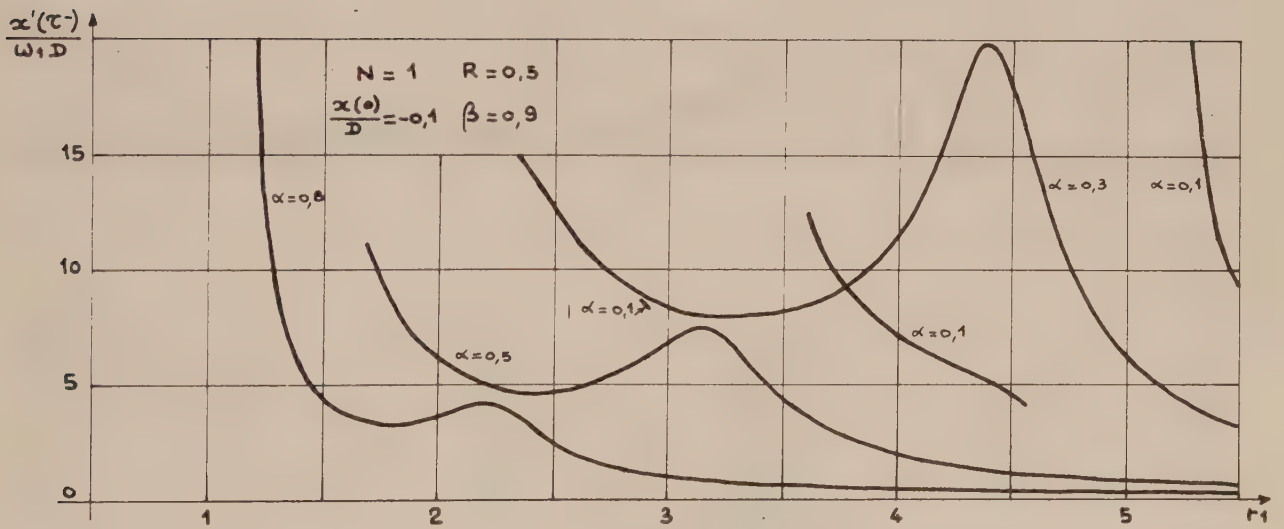


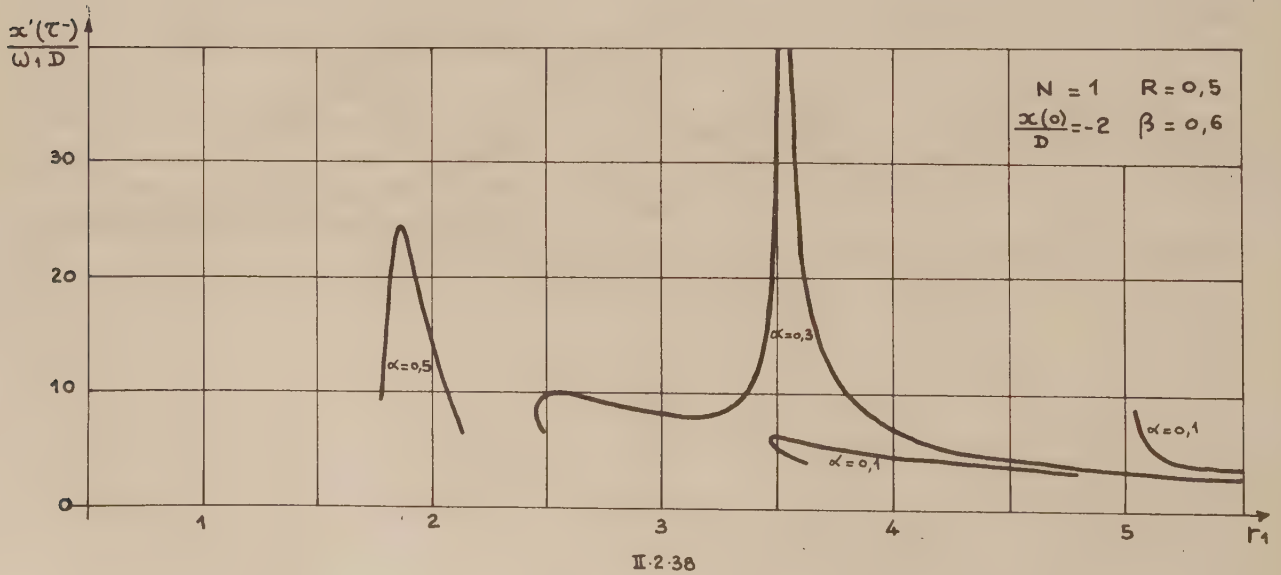
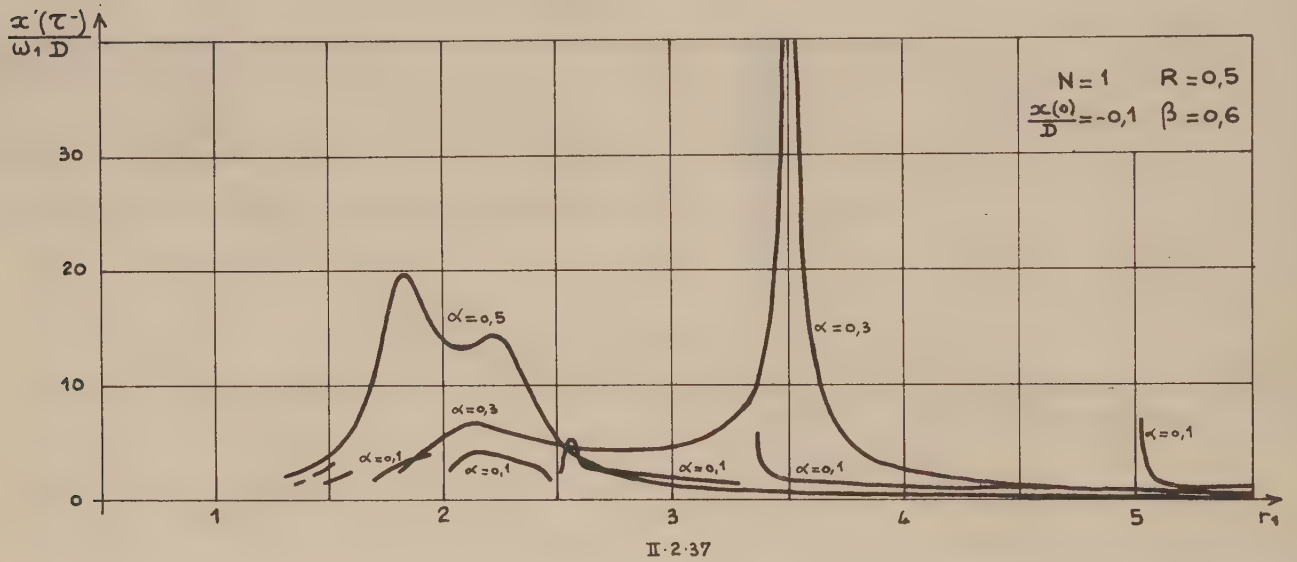
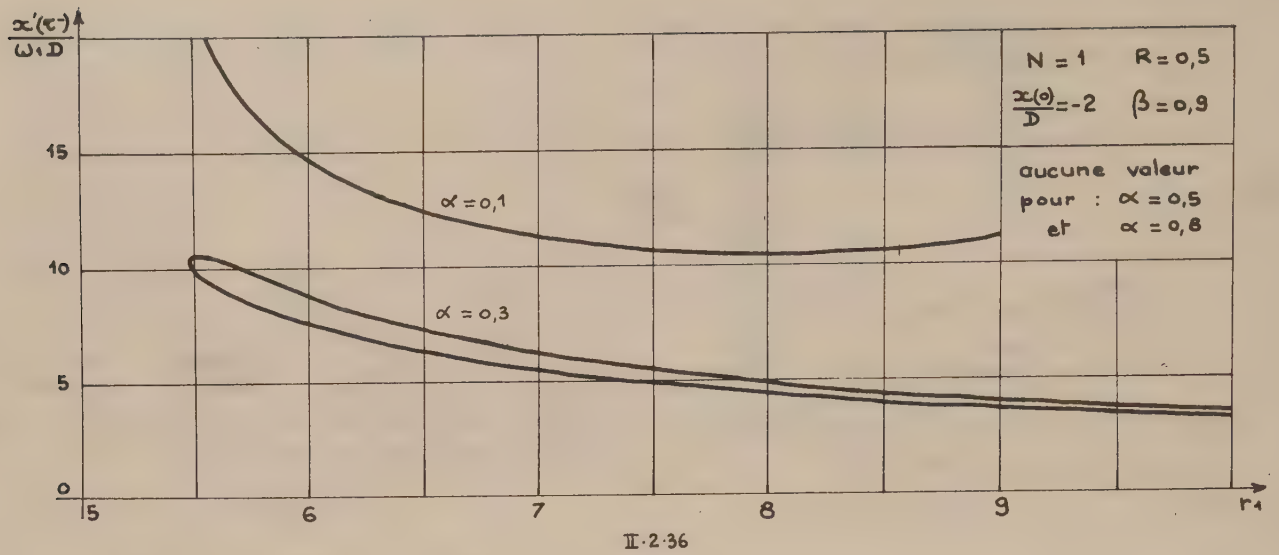
Fig 16

#### 3,2,4,2 Graphes

| $\alpha$        | $x(0)/D$ | N | R   | $\beta$ | $r_1$   | Graphe<br>n° |
|-----------------|----------|---|-----|---------|---------|--------------|
| 0,1/0,3/0,5/0,8 | -0,1     | 1 | 0,5 | 0,9     | 0,5-5,5 | II-2-35      |
| "               | -2       | 1 | "   | "       | 5-10    | 36           |
| 0,1/0,3/0,5     | -0,1     | 1 | "   | 0,6     | 0,5-5,5 | 37           |
| "               | -2       | 1 | "   | "       | " "     | 38           |



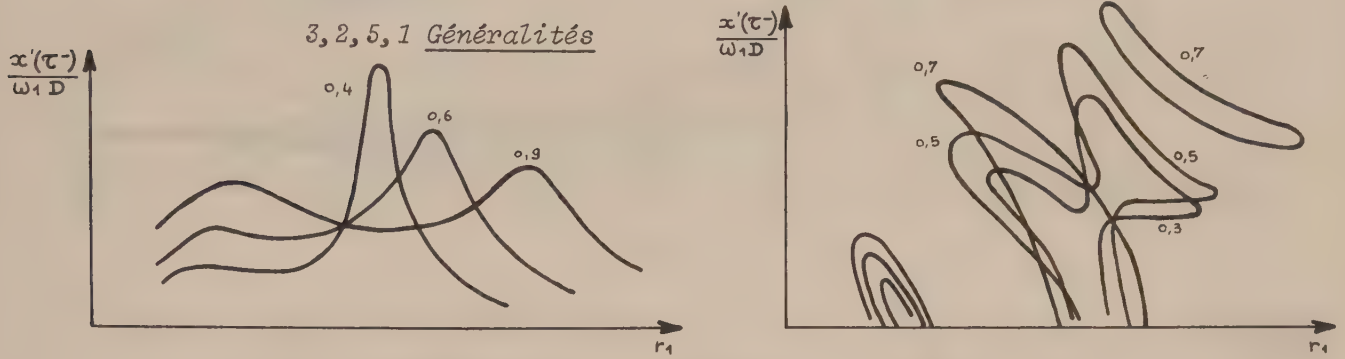
II-2-35



### 3,2,4,3 Lois générales

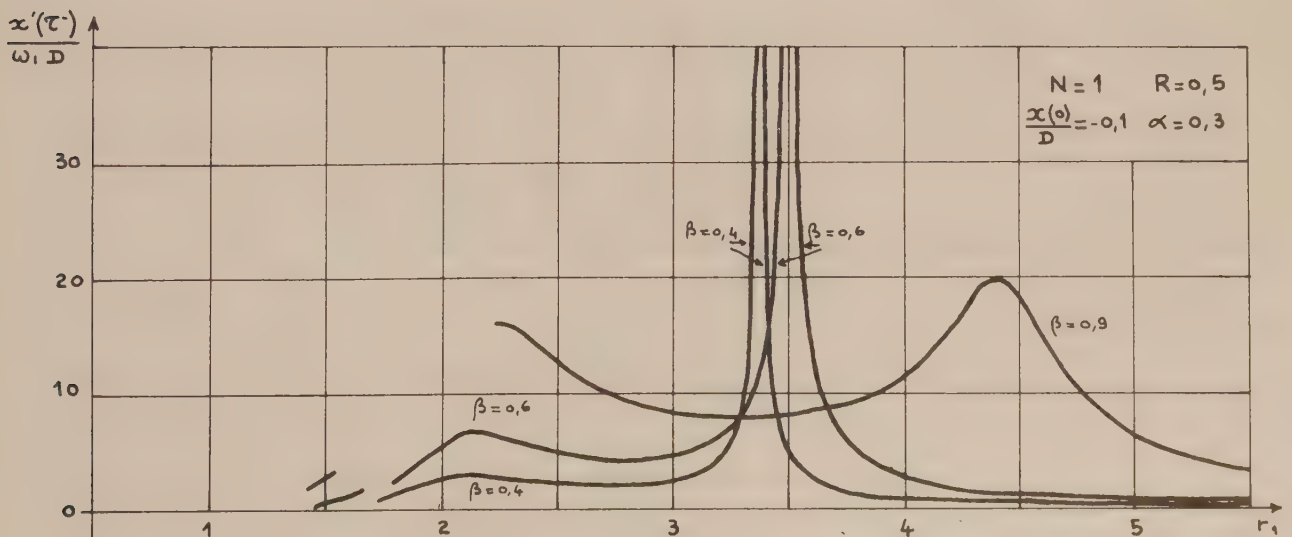
- Les maxima de la vitesse de percussion varient avec  $\alpha$
- Quand  $\alpha$  croît, la fréquence d'excitation correspondant à chaque maximum de la vitesse de percussion décroît.

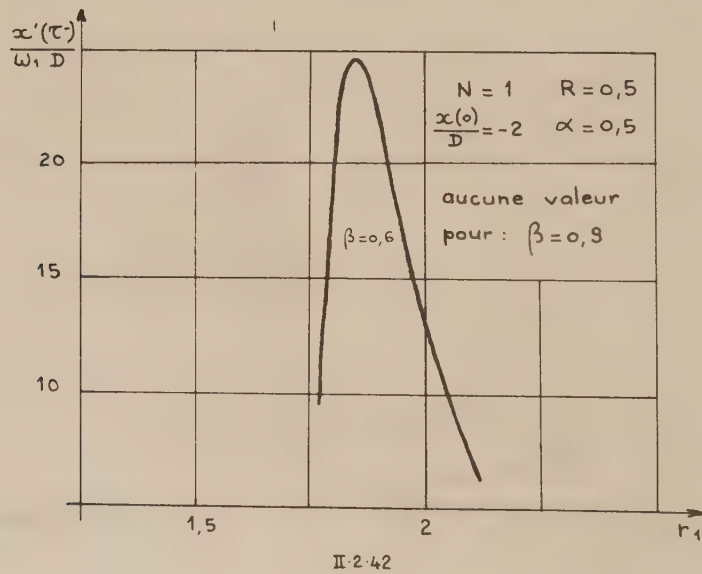
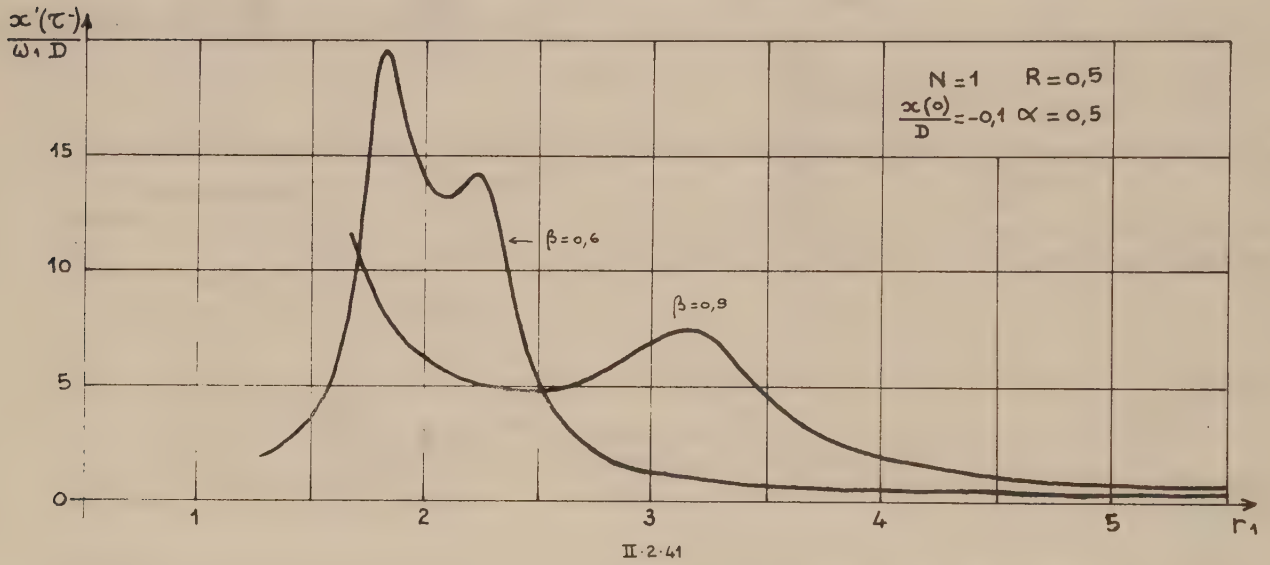
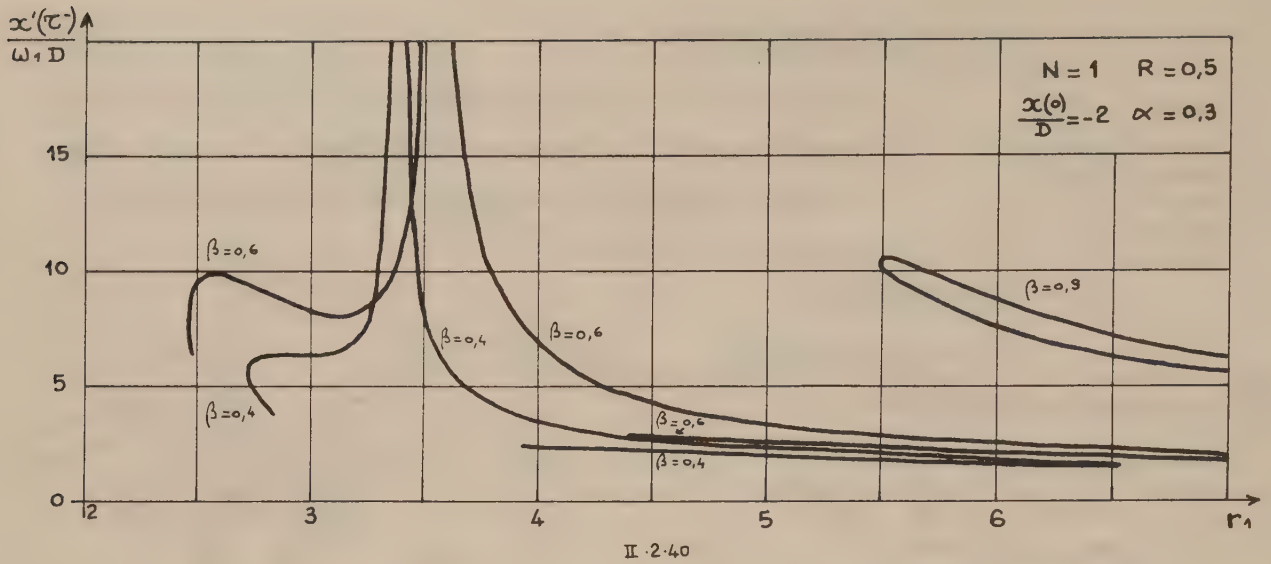
### 3,2,5 Influence de $\beta$

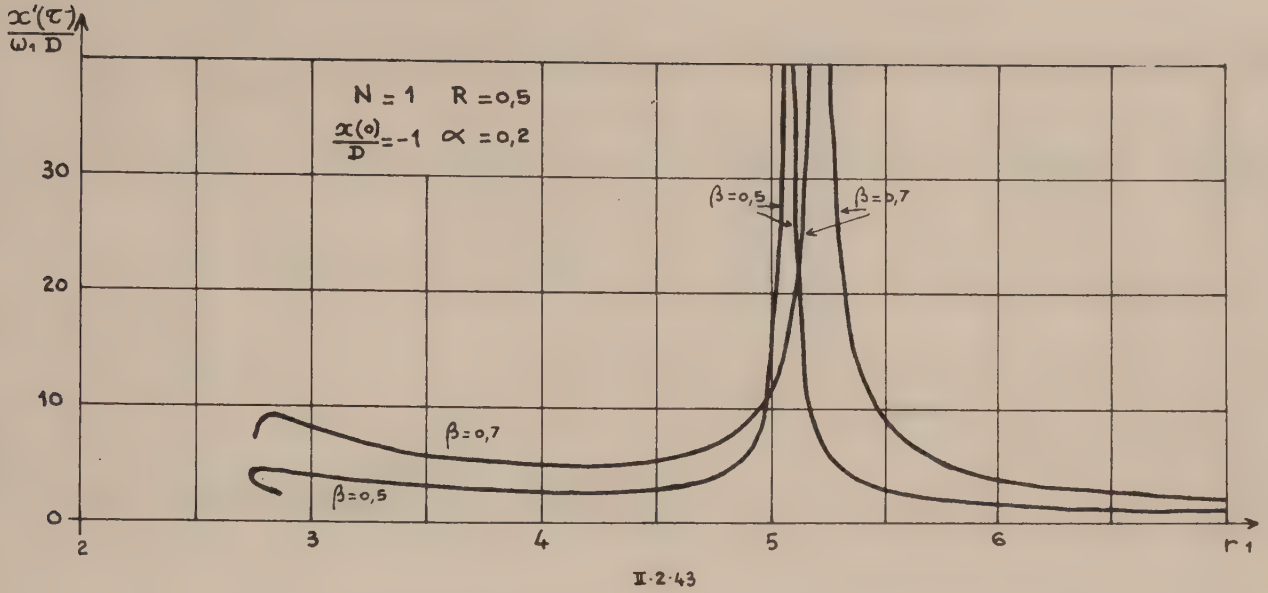


### 3,2,5,2 Graphes

| $\beta$     | $x(0)/D$ | N | R   | $\alpha$ | $r_1$    | Graphe n° | Observations                         |
|-------------|----------|---|-----|----------|----------|-----------|--------------------------------------|
| 0,4/0,6/0,9 | -0,1     | 1 | 0,5 | 0,3      | 0,5-5,5  | II-2-39   |                                      |
| "           | -2       | 1 | "   | "        | 2 -7     | 40        | aucune valeur pour $0,5 < r_1 < 2$   |
| 0,6/0,9     | -0,1     | 1 | "   | 0,5      | 0,5-5,5  | 41        |                                      |
| "           | -2       | 1 | "   | "        | 1,25-2,5 | 42        | aucune valeur pour $0,5 < r_1 < 1,5$ |
| 0,5/0,7     | -1       | 1 | "   | 0,2      | 2 -7     | 43        | aucune valeur pour $0,5 < r_1 < 2$   |





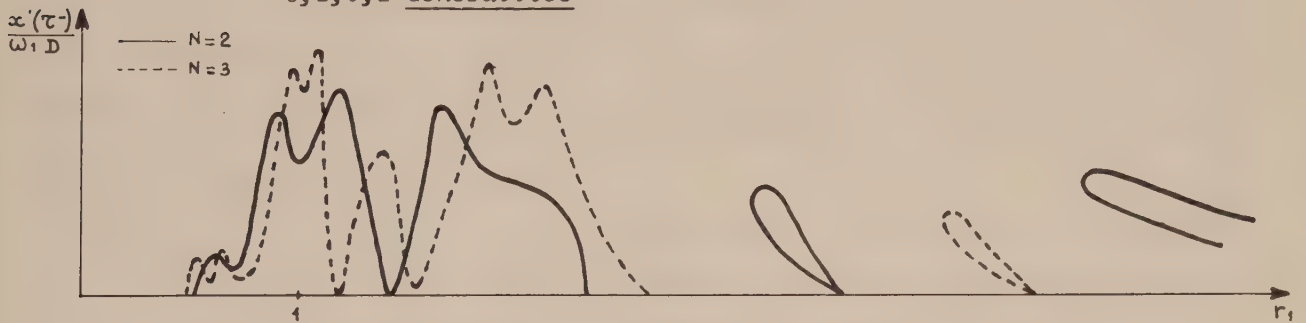


### 3,2,5,3 Lois générales

Quand  $\beta$  croît, le maximum de la deuxième plage de résonance décroît alors que la fréquence d'excitation correspondante augmente.

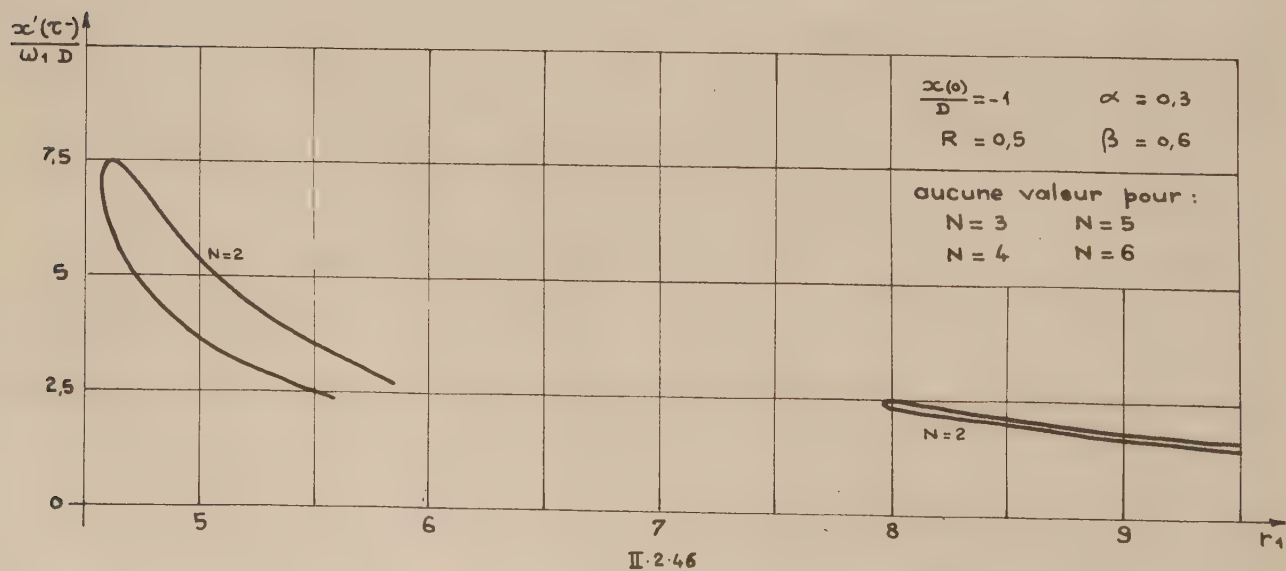
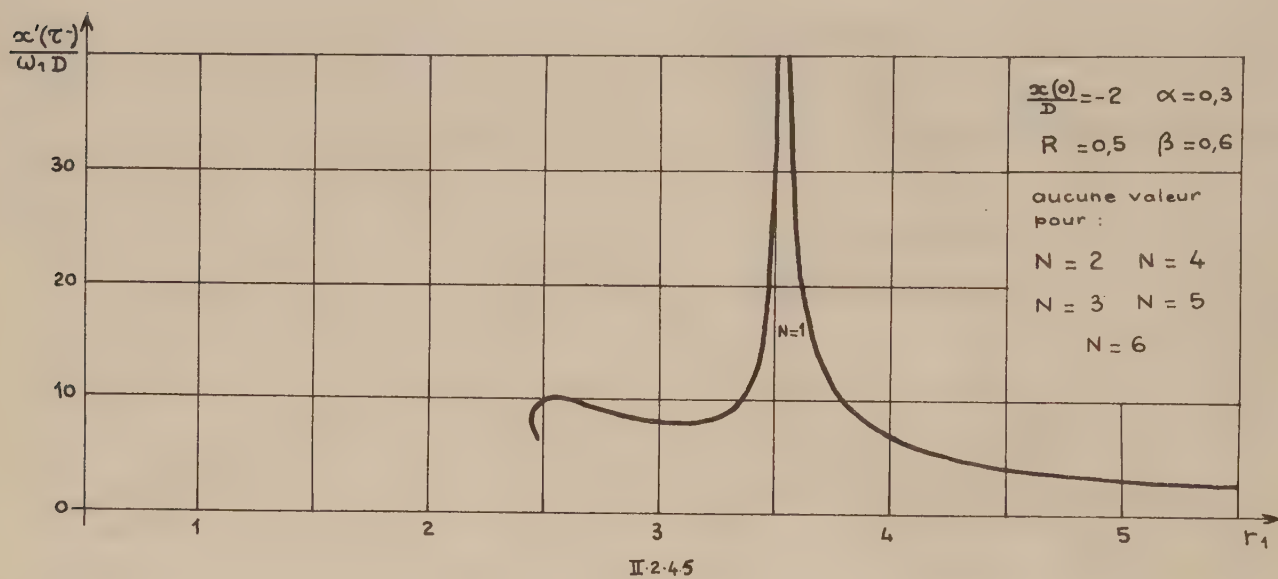
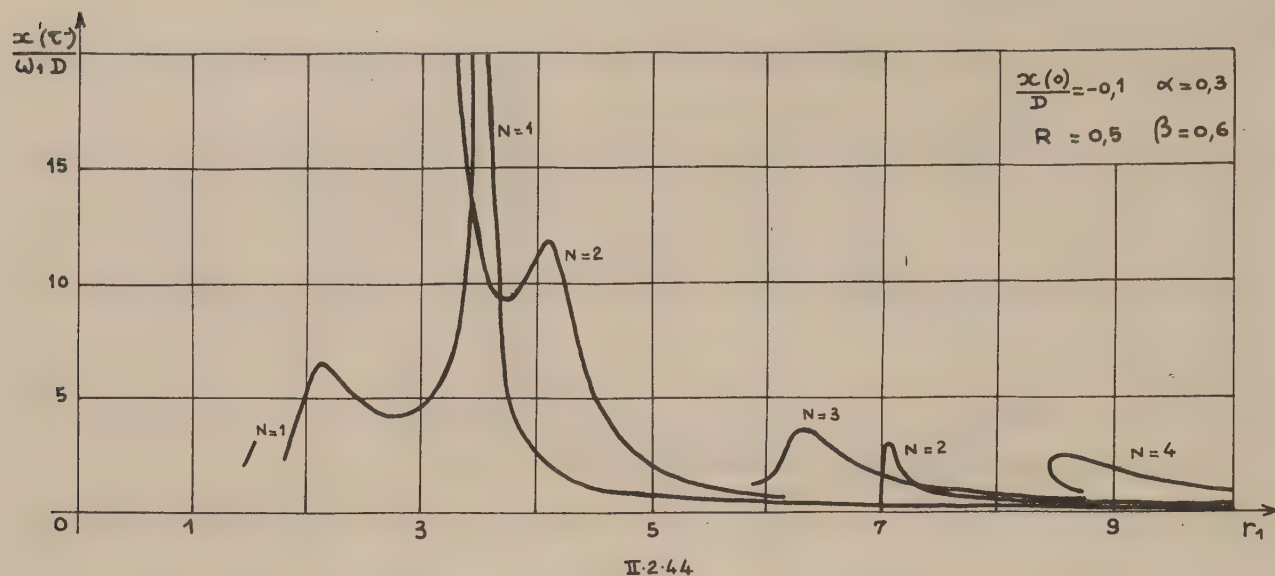
### 3,2,6 Influence de N

#### 3,2,6,1 Généralités



#### 3,2,6,2 Graphes

| N           | $x(0)/D$ | R   | $\alpha$ | $\beta$ | $r_1$    | Graphe<br>n° | Observations                        |
|-------------|----------|-----|----------|---------|----------|--------------|-------------------------------------|
| 1/2/3/4     | -0,1     | 0,5 | 0,3      | 0,6     | 0,5- 10  | II-2-44      |                                     |
| 1/2/3/4/5/6 | -2       | "   | "        | "       | 0,5- 5,5 | 45           | pas de valeur<br>pour N = 3/4/5/6   |
| 2/3/4/5/6   | -1       | "   | "        | "       | 4,5- 9,5 | 46           | pas de valeur<br>pour N = 2/3/4/5/6 |
|             |          |     |          |         |          |              |                                     |



### 3,2,6,3 Lois générales

- Les maxima de la vitesse de percussion varient avec N
- Le nombre de plages de percussions non automatiques croît avec N
- Il est assez difficile d'obtenir des plages de percussions régulières avec N supérieur à 1 dès que  $\frac{x(0)}{D}$  est inférieur à -0,5 et  $r_1 < 10$ .

#### 4 - CONCLUSION -

Pour le système à 1 degré de liberté avec butée fixe (cf. 2ème partie Chapitre 1), il est assez simple de dégager les lois essentielles qui régissent le phénomène à partir des graphes de la vitesse de percussion en fonction de la fréquence d'excitation. Par contre, ceci est beaucoup moins aisé pour le système à 2 degrés de liberté qui possède 2 paramètres supplémentaires ( $\alpha$  et  $\beta$ ).

Comme pour le système à 1 degré de liberté, le phénomène de résonance n'existe pas, et de plus la vitesse de percussion est finie tant que les paramètres sont finis, même pour R égal à 1'unité.

Du développement de ce chapitre, il ressort que la vitesse de percussion varie de façon très diverse suivant les valeurs des paramètres. Il est assez aisé de remarquer que ses maxima augmentent avec R et N. Il est plus difficile de déduire les lois générales de l'influence de  $x(0)/D$ ,  $\alpha$  et  $\beta$ . Retenons que la vitesse de percussion s'annule pour  $\text{tg}\psi_1$  ou  $\text{tg}\psi_2 = 0$  (exception faite pour les deux fréquences de résonance), même dans les plages automatiques, ce qui peut surprendre à priori car dans ces plages, les percussions existent toujours ; nous verrons dans la troisième partie que l'expérience confirme bien ce résultat.

En ce qui concerne les plages de percussions, nous retrouvons les 3 types définis pour le 1 degré de liberté. Les plages automatiques sont indépendantes de R et N, alors que celles non automatiques ne dépendent à leur naissance que de  $\alpha$  et N ( $\text{tg}\psi_1$  ou  $\text{tg}\psi_2 = 0$  avec  $r_1 \neq 1$  et  $\alpha r_1 \neq 1$ ). L'existence et l'amplitude des plages semi-automatiques et non automatiques sont liées à tous les paramètres :  $\frac{x(0)}{D}$ , R, N,  $\alpha$  et  $\beta$ .

Nous pouvons aussi noter l'importance des plages où les percussions sont irrégulières (principalement pour  $r_1 < 2$ ) par comparaison au système à 1 degré de liberté où elles sont en général de faibles amplitudes.



CHAPITRE 3

---

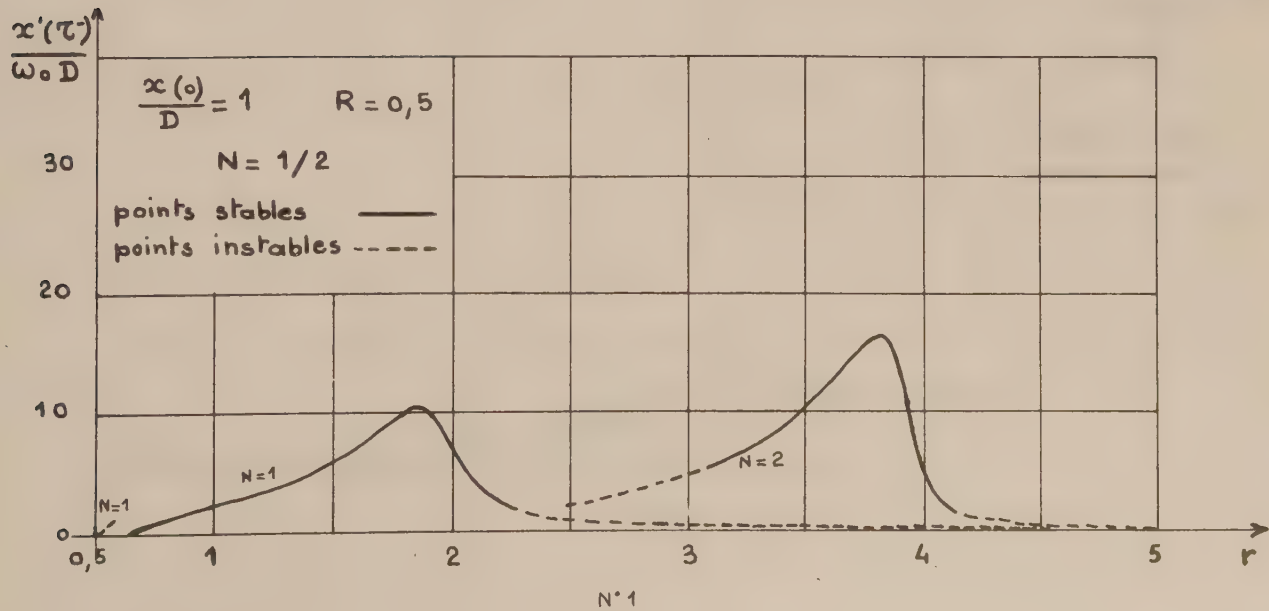
INFLUENCE DE LA STABILITE SUR LES PERCUSSIONS REGULIERES  
DES SYSTEMES A 1 ET 2 DEGRES DE LIBERTE SUR BUTEES FIXES  
ET EXCITES PAR BALOURDS

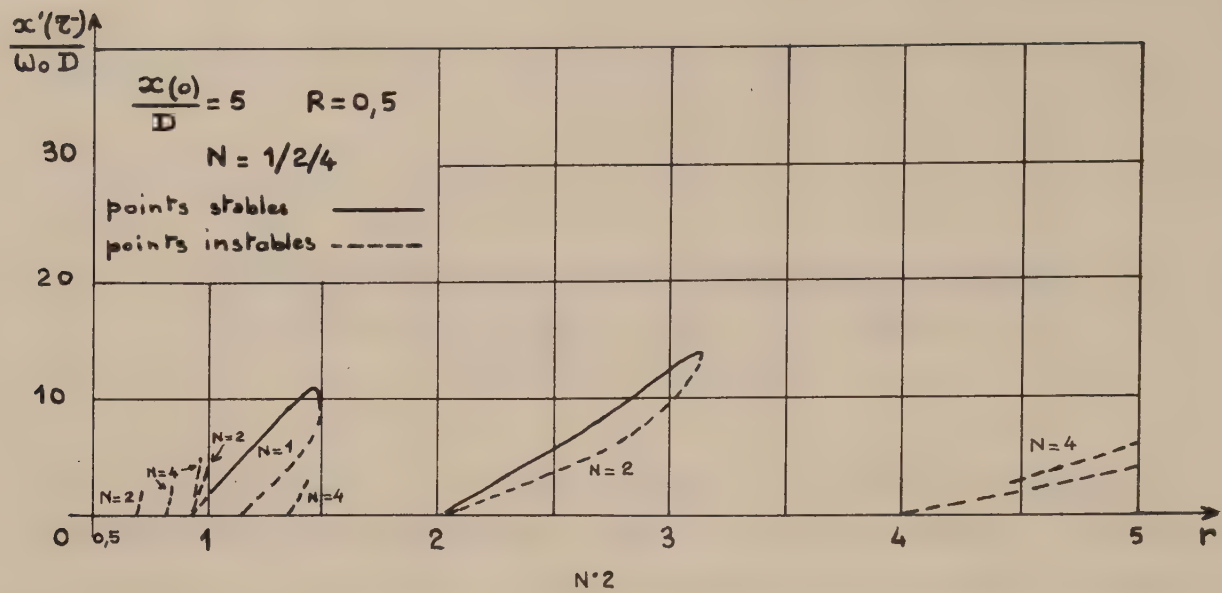
L'analyse de l'influence de chaque paramètre des systèmes à 1 ou 2 degrés de liberté sur la vitesse de percussion vient d'être réalisée, dans les deux chapitres précédents, sans tenir compte des conditions de stabilité des mouvements.

Regardons sur quelques graphes de  $\frac{x'(\tau^-)}{\omega_0 D} = f(r_\ell)$  l'influence de ces conditions définies au chapitre 3 de la première partie :

Système à 1 degré de liberté

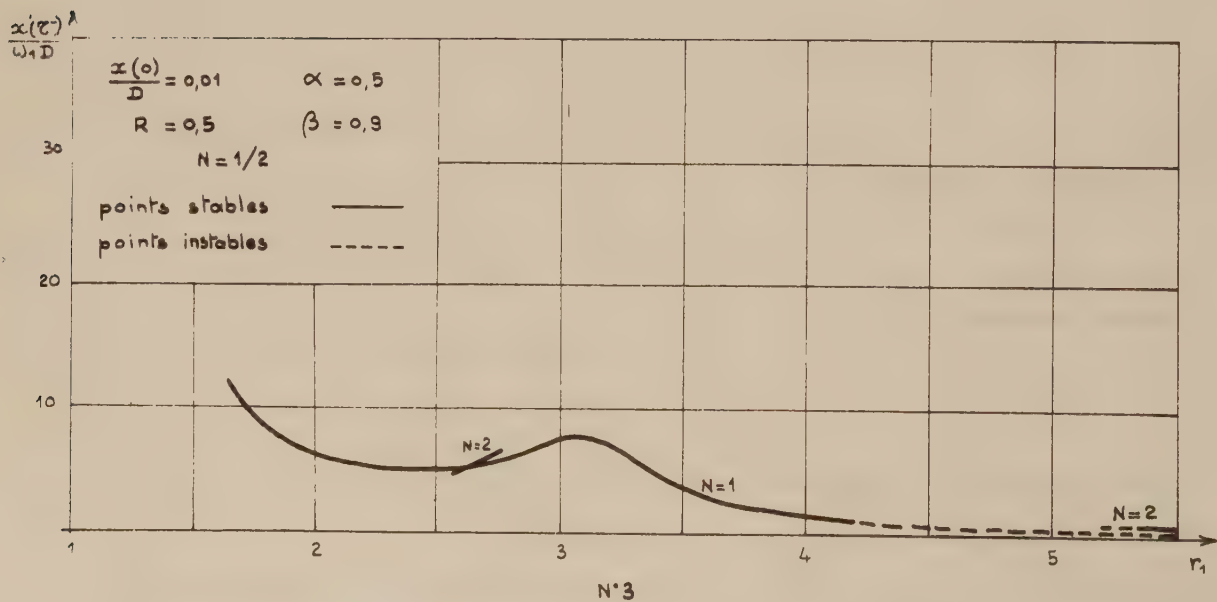
| $\frac{x(o)}{D}$ | R   | N     |
|------------------|-----|-------|
| 1                | 0,5 | 1/2   |
| 5                | 0,5 | 1/2/4 |

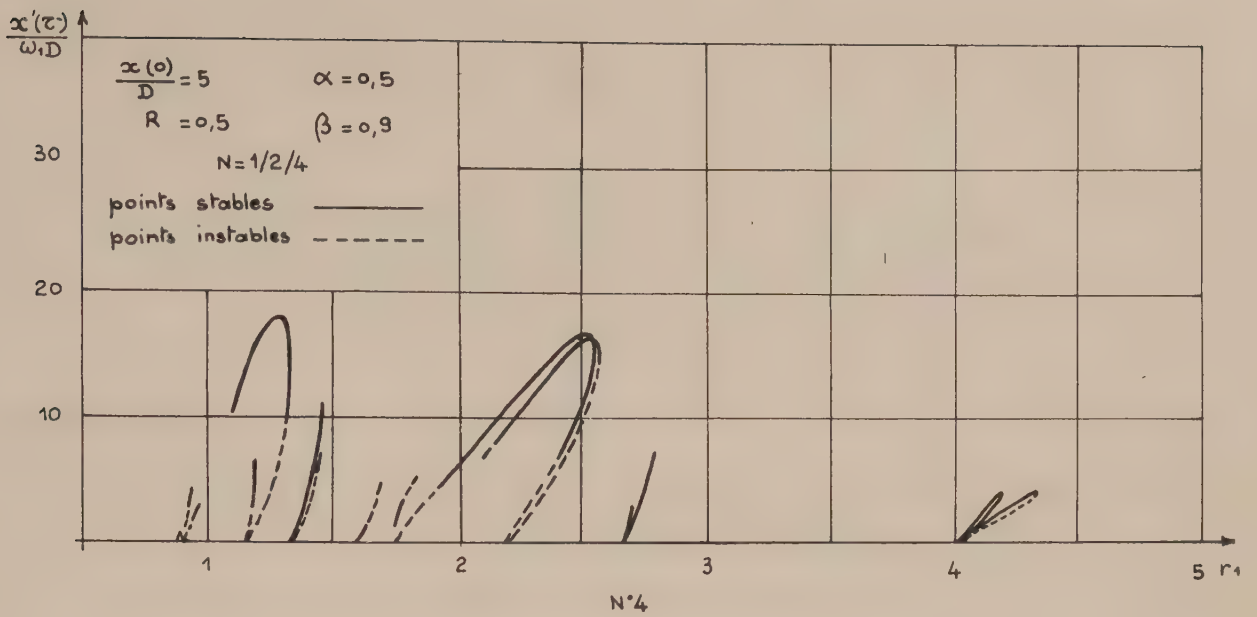




Système à 2 degrés de liberté

| $\frac{x(0)}{D}$ | R   | N     | $\alpha$ | $\beta$ |
|------------------|-----|-------|----------|---------|
| 0,01             | 0,5 | 1/2   | 0,5      | 0,9     |
| 5                | 0,5 | 1/2/4 | "        | "       |





### CONCLUSION

L'application des conditions de stabilité a comme résultat de réduire partiellement ou en totalité l'amplitude des plages de percussions.

Les lois essentielles édictées précédemment restent entièrement valables.



## CHAPITRE 4

---

### APPLICATION DES RESULTATS THEORIQUES A LA DETERMINATION DES CARACTERISTIQUES MECANQUES DES VIBROPERCUTEURS A 1 ET 2 DEGRES DE LIBERTE, MONTES SUR BUTEE FIXE

#### 1 - PRELIMINAIRE -

Un pieu (ou une palplanche) fiché dans un sol et soumis à un vibropercuteur pénètre dans ce sol sous l'action conjuguée du double phénomène suivant :

- les vibrations qui excitent le complexe "pieu-sol" ;
- les percussions.

Le frottement latéral du pieu sur le sol est une fonction de la fréquence d'excitation. Il existe une valeur optimale de cette fréquence telle que le frottement soit minimum.

Les percussions complètent les vibrations en dégageant, à chaque fois et dans un temps très court, une énergie importante utilisée, en grande partie, à la pénétration du pieu.

Ces brèves considérations entraînent un double choix :

- choix de la plage de fréquences d'excitation suivant la nature du sol. Il est évident que cette plage sera la plus étendue possible pour qu'il soit possible d'y trouver la fréquence optimum telle que le frottement du pieu sur le sol soit minimum. Pratiquement la fréquence minimum est d'environ 12 Hz.

Un vibropercuteur monté sur butée fixe représente le cas du pieu au refus ; la plus grande partie de la puissance disponible est dissipée en percussions. Pour éviter des vitesses de percussions trop importantes, qui auraient pour effet une détérioration rapide de certains éléments mécaniques du vibropercuteur, il est indispensable que la masse du percuteur ne soit pas trop faible.

Dans la pratique, l'excitation d'un vibropercuteur est réalisée par balourds entraînés par un moteur hydraulique (ce dernier est moins sensible aux effets dynamiques qu'un moteur électrique).

## 2 - CALCUL DE LA VITESSE DE PERCUSSION -

Soient :  $P$  la puissance disponible  
 $m_1$  la masse du percuteur  
 $R$  le coefficient de restitution de vitesse  
 $x'(\tau^-)$  la vitesse de percussion  
 $\Omega$  la pulsation d'excitation  
 $N$  le nombre entier de cycles décrits par l'excitation entre deux percussions consécutives.

$$P = \frac{1}{2} m_1 (1-R^2) x'^2(\tau^-) \frac{\Omega}{2\pi N} \quad (1)$$

Pour un vibropercuteur au point fixe,  $R$  peut être considéré comme constant.  $R$  dépend notamment de la nature des matériaux du percuteur et de la tête du pieu ainsi que de la propagation des ondes de contraintes.

La puissance est en général fonction de la pulsation d'excitation.

La relation (1) entraîne :

$$\left[ x'(\tau^-) \right]_{\max} = \sqrt{\frac{4 \pi N}{m_1 (1-R^2)} \frac{P}{\Omega}}$$

### Cas du moteur hydraulique :

Dans la gamme de fréquences d'utilisation d'un moteur hydraulique, la puissance est sensiblement proportionnelle à la vitesse de rotation.

Soit :  $P = \lambda \Omega$

$P$  : puissance

$\lambda$  : constante dépendant des caractéristiques du moteur

$$\left[ x'(\tau^-) \right]_{\max} = \sqrt{\frac{4 \pi N \lambda}{m_1 (1-R^2)}}$$

La vitesse de percussion est une constante indépendante de la vitesse de rotation pour un vibropercuteur donné au point fixe et un  $N$  déterminé.

## 3 - REGLAGE DE L'INTERSTICE REEL POUR OBTENIR LA VITESSE DE PERCUSSION MAXIMUM. -

Le but est de dissiper la puissance disponible, pour un vibropercuteur donné, en réglant judicieusement l'interstice en fonction de la fréquence d'excitation. Il va de soi que ce but ne peut être atteint que dans certaines plages de la fréquence d'excitation.

Nous étudierons le cas de l'interstice positif.

Sont connus :

- pour le vibropercuteur à 1 degré  $\omega_0, N, R, m, D, \Omega$
- " " à 2 "  $\omega_1, N, R, m_1, D, \Omega, \alpha, \beta$

Traçons sur un même graphe (Fig. 1) :

$\frac{x'(\tau^-)}{\omega_\ell D} = f(\Omega)$  pour diverses valeurs de  $\frac{x(o)}{D}$  (cf. Deuxième partie - chap. 1 ou 2)

$\left[ \frac{x'(\tau^-)}{\omega_\ell D} \right]_{\max} = f(\Omega)$  connu à partir des caractéristiques du moteur (cf. § 2)

$\omega_\ell = \omega_0$  pour 1 degré de liberté

$\omega_\ell = \omega_1$  pour 2 degrés de liberté

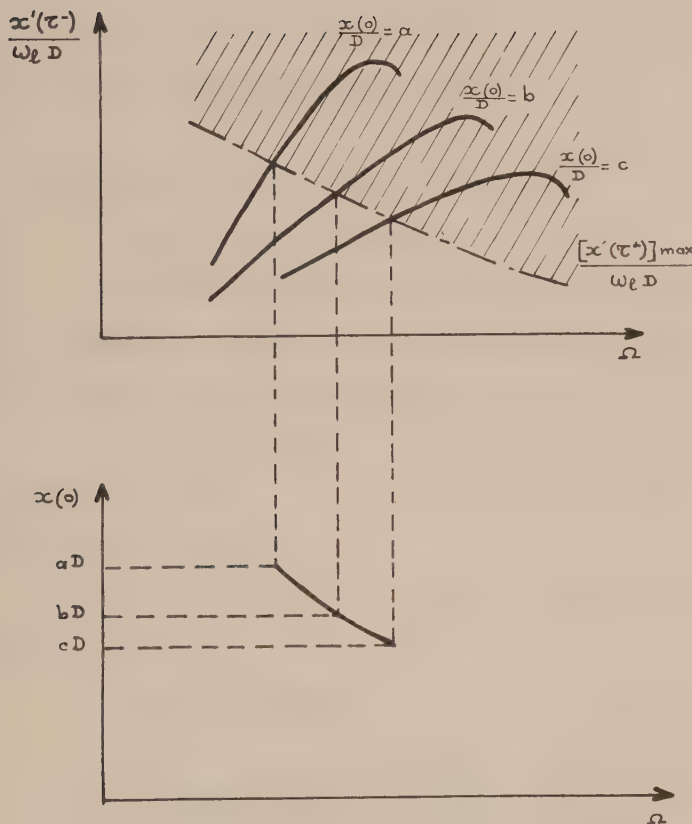


Fig 1

La courbe représentative de  $\left[ \frac{x(\tau^-)}{\omega_\ell D} \right]_{\max}$  coupe un certain nombre des graphes de  $\frac{x'(\tau^-)}{\omega_\ell D} = f(\Omega)$  tracés pour différentes valeurs de  $\frac{x(o)}{D}$ .

Soient  $\Omega = \Omega_b$  et  $\frac{x(o)}{D} = b$  le couple de valeurs lié à un des points d'intersection.

Pour ce point

$$\frac{x'(\tau^-)}{\omega_\ell D} = \left[ \frac{x'(\tau^-)}{\omega_\ell D} \right]_{\max} \text{ et } x(o) = bD$$

Il est donc possible pour tout point i d'intersection de connaître  $\Omega = \Omega_i$  et  $x(o) = iD$  et de tracer le graphe

$x(o) = f(\Omega)$  qui est celui du réglage optimum, c'est-à-dire celui qui permet d'utiliser le moteur à sa puissance maximum.

#### CONCLUSIONS :

1 - Supposons  $x(0)$  réglé de telle sorte que  $\frac{x(0)}{D} = b$  et effectuons un balayage en fréquence : les percussions seront possibles entre  $\Omega_{01}$  correspondant à l'accrochage et  $\Omega_b$ . En effet le moteur n'a plus la puissance nécessaire pour permettre des percussions au-delà.

Si nous désirons des percussions à  $\Omega = \Omega_c$ , par exemple, il faudra diminuer  $x(0)$  au moins jusqu'à la valeur  $cD$ .

En d'autres termes, les vitesses de percussion de la zone hachurée sont impossibles à atteindre avec les caractéristiques mécaniques du système étudié.

2 - Dans le cas où il existe deux valeurs de la vitesse de percussion pour

une même pulsation d'excitation, le mouvement correspondant à la plus faible est instable et ne doit pas être retenu.

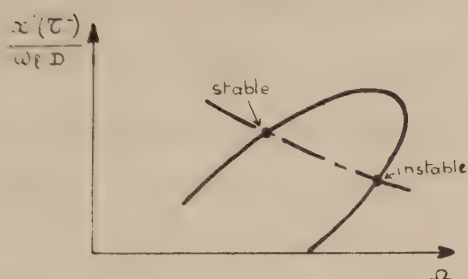


Fig 2

#### 4 - INFLUENCE DE LA VALEUR DES BALOURDS SUR LES PLAGES DE PERCUSSIONS OPTIMALES -

Reprenons les graphes de la figure 1 pour différentes valeurs de  $D$ . Soient  $D_1, D_2, D_3$  ces valeurs en ordre décroissant, tous les autres paramètres du système restant inchangés.

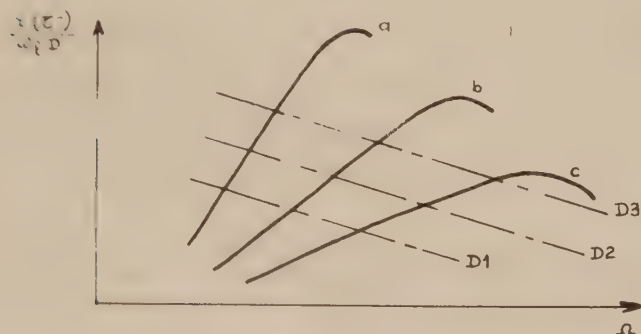
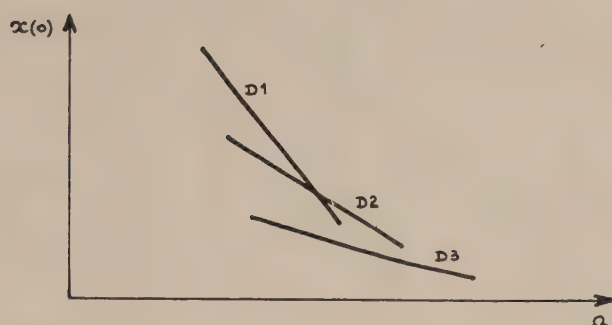


Fig 3

a, b, c valeurs de  $\frac{x(0)}{D}$

$$\text{—} \quad \frac{x'(\tau^-)}{\omega_l D} = f(\Omega)$$

$$\text{---} \quad \frac{[x'(\tau^-)]_{\max}}{\omega_l D_j} = f(\Omega) \quad j = 1, 2, 3$$



Réglage optimum, pour  
 $D_1, D_2, D_3$ , de l'interstice.

La figure 3 illustre directement l'influence de  $D$  sur la plage de percussions optimales.

Pratiquement le choix de  $D$  sera fonction de l'étendue que l'on désire obtenir pour :

- d'une part, les plages de percussions optimales ;
- d'autre part, les plages de percussions possibles  
 (pas obligatoirement optimales).

##### 5 - VIBROPERCUTEUR A 1 DEGRE DE LIBERTE -

Sont supposées connues :

- la pulsation propre  $\omega_0$
- la masse percutante  $m$
- les caractéristiques du moteur.

La détermination de la valeur des balourds et le réglage de l'interstice à sa valeur optimum, découlent immédiatement des § 3 et 4.

##### Application numérique

Soit un vibropercuteur à 1 degré de liberté possédant les caractéristiques suivantes :

$$\omega_0 = 78,5 \text{ rad/s}$$

$$m = 115 \text{ Kg}$$

moteur : type hydraulique 12 CV à 1500 t/mn

balourds :  $m_b a = 0,45 \text{ kg.m}$  ou  $0,6 \text{ kg.m}$

Ainsi  $D_1 = 0,39 \cdot 10^{-2} \text{ m}$      $D_2 = 0,52 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ .

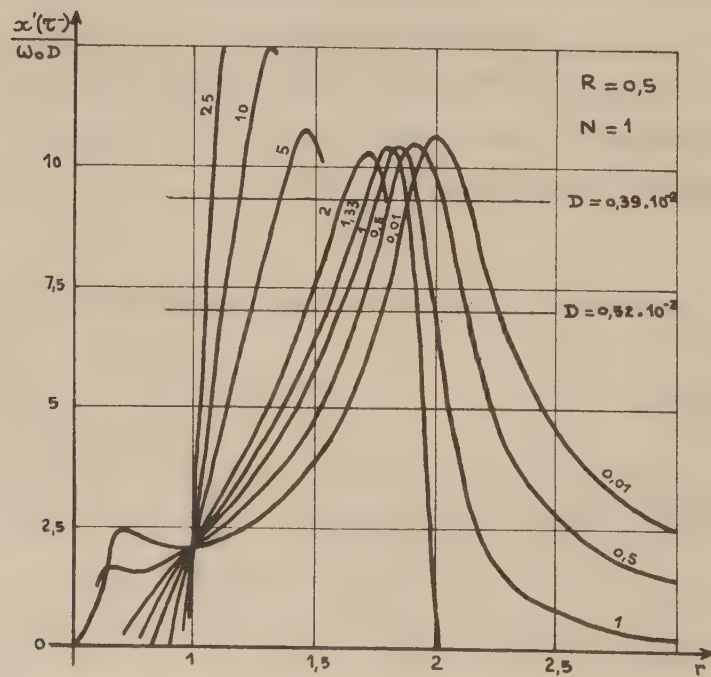
Suivant les valeurs de  $R$  et  $N$  nous obtenons pour  $\frac{[x'(\tau^-)]_{\max}}{\omega_0 D}$

| R    | D              | N = 1 | N = 2 | N = 3 | N = 4 |
|------|----------------|-------|-------|-------|-------|
| 0,25 | D <sub>1</sub> | 8,36  | 11,82 | 14,47 | 16,71 |
|      | D <sub>2</sub> | 6,27  | 8,86  | 10,86 | 12,53 |
| 0,50 | D <sub>1</sub> | 9,34  | 13,21 | 16,18 | 18,68 |
|      | D <sub>2</sub> | 7,01  | 9,91  | 12,14 | 14,01 |
| 0,75 | D <sub>1</sub> | 12,23 | 17,30 | 21,19 | 24,46 |
|      | D <sub>2</sub> | 9,17  | 12,97 | 15,89 | 18,35 |

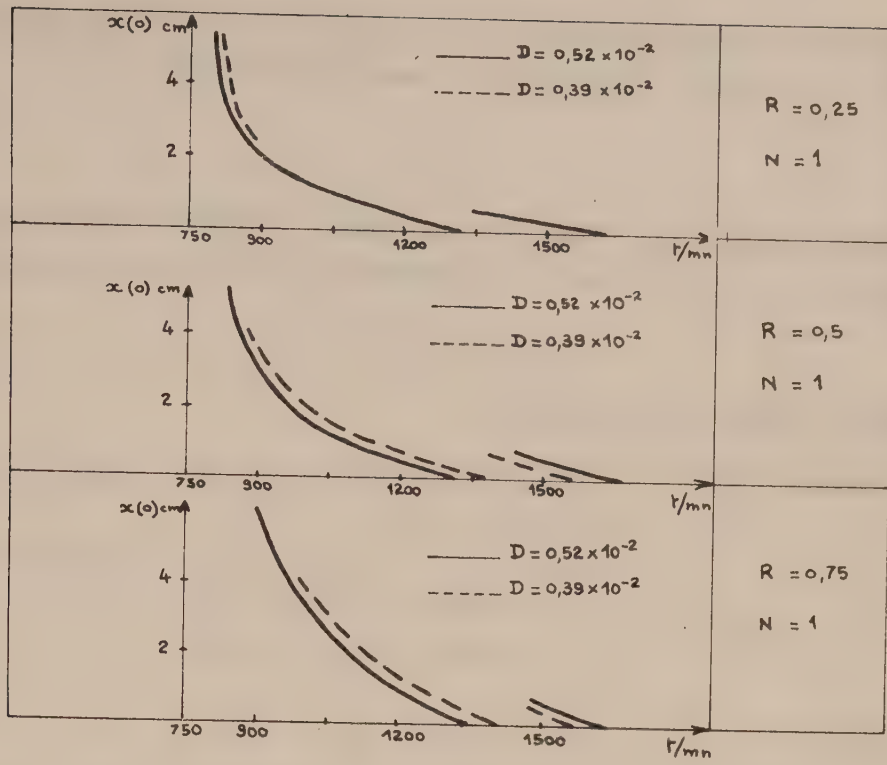
### Résultats :

Le graphe n° 1 illustre la méthode développée au § 3 pour le réglage optimum de  $x(o)$ .

Le graphe n° 2 présente les résultats obtenus pour les différentes valeurs de R et N retenues.



N° 1



N° 2

Remarque :

Les résultats présentés sont limités au cas de l'interstice positif ou nul pour les plages de percussions automatiques ou semi-automatiques.

CONCLUSION :

Le graphe 2 montre clairement que la plage optimum de percussions peut se scinder en deux plages distinctes dont les amplitudes respectives diminuent avec D et N.

6 - VIBROPERCUTEUR A DEUX DEGRES DE LIBERTE -

Sont supposés connus :

- la pulsation  $\omega_1$
- le coefficient  $\alpha$  (choix de la plage de percussion)
- la masse percutante  $m_1$
- les caractéristiques du moteur.

6,1 Préliminaire

Pour déterminer les caractéristiques du système, il est nécessaire de se fixer un paramètre supplémentaire :

- Soit  $\beta$ , qui sera choisi de telle sorte que la plage d'accrochage automatique soit la plus étendue possible et qu'il n'y ait pas trop de disproportions entre les vitesses de percussion des deux plages.

- Soit  $m_2$  la masse excitatrice qui sera choisie la plus faible possible, pour ne pas alourdir inutilement le vibropercuteur.

1er cas :  $\omega_1$ ,  $\alpha$ ,  $m_1$  et  $\beta$  sont fixés

$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{\alpha}$$

$$\beta = \frac{\omega_1}{\omega_{02}} \text{ mais } \omega_{02} \omega_{01} = \omega_1 \omega_2$$

$$\text{d'où } \omega_{01} = \frac{\omega_1}{\alpha} \beta \text{ or } k_1 = \omega_{01}^2 m_1$$

$$k_1 = m_1 \left( \frac{\beta}{\alpha} \omega_1 \right)^2$$

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \omega_{0,1}^2 + \omega_{0,2}^2 + \frac{K_1}{m_2}$$

par suite :

$$m_2 = \frac{m_1 \beta^4}{\alpha^2 \beta^2 + \beta^2 - \beta^4 - \alpha^2}$$

$$K_2 = \frac{m_1 \beta^2 \omega_1^2}{\alpha^2 \beta^2 + \beta^2 - \beta^4 - \alpha^2}$$

2ème cas :  $\omega_1$ ,  $\alpha$ ,  $m_1$  et  $m_2$  sont fixés

$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{\alpha}$$

Posons

$$\delta = \frac{m_1}{m_2}$$

$$\delta = \frac{\alpha^2 \beta^2 + \beta^2 - \beta^4 - \alpha^2}{\beta^4}$$

d'où

$$\beta^2 = \frac{1 + \alpha^2 + \varepsilon \sqrt{(1 + \alpha^2)^2 - 4\alpha^2(\delta + 1)}}{2(\delta + 1)} \quad \varepsilon = \pm 1$$

Rappelons que  $\beta$  doit satisfaire la relation :

$$0 < \alpha < \beta < 1$$

Ainsi :

$$K_1 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \omega_1^2 m_1$$

$$K_2 = \frac{\omega_1^2}{\beta^2} m_2$$

Applications numériques

$$\omega_1 = 78,5 \text{ rad/s}$$

$$\alpha = 0,3$$

$$m_1 = 50 \text{ kg}$$

$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{\alpha} = 262 \text{ rad/s}$$

1er cas :  $\beta = 0,7$  est fixé

$$K_1 = m_1 \left( \frac{\beta}{\alpha} \omega_1^2 \right) \# 720\,000 \text{ N/m}$$

$$m_2 = \frac{m_1 \beta^4}{\alpha^2 \beta^2 + \beta^2 - \beta^4 - \alpha^2} \# 59 \text{ kg}$$

$$K_2 = \frac{m_1 \beta^2 \omega_1^2}{\alpha^2 \beta^2 + \beta^2 - \beta^4 - \alpha^2} \# 740\,000 \text{ N/m}$$

2ème cas :  $m_2 = 25 \text{ kg}$  est fixé

$$\delta_1 = \frac{m_1}{m_2} = 2$$

$$\beta^2 = \frac{1 + \alpha^2 \mp \sqrt{(1 + \alpha^2)^2 - 4\alpha^2(\delta + 1)}}{2(\delta + 1)}$$

$$\beta \# 0,36 \text{ ou } 0,50$$

Si  $\beta = 0,36$

$$K_1 = \omega_1^2 \frac{\beta^2}{\alpha^2} m_1 \# 445\,000 \text{ N/m}$$

$$K_2 = \frac{\omega_1^2}{\beta^2} m_2 \# 120\,000 \text{ N/m}$$

Si  $\beta = 0,50$

$$K_1 = 855\,000 \text{ N/m}$$

$$K_2 = 615\,000 \text{ N/m}$$

Nota :

Il est plus judicieux de choisir  $\beta = 0,50$  que  $\beta = 0,36$  pour obtenir une plage de percussions automatiques plus étendue.

### 6,2 Détermination de la valeur des balourds et réglage optimum de l'interstice.

A partir des caractéristiques du moteur nous obtenons la variation de la vitesse optimum de percussion en fonction de la fréquence d'excitation.

La détermination de D est faite suivant le même processus.

### Application numérique.

Reprenons l'application du § 6,1 pour le deuxième cas et  $\beta = 0,50$ .

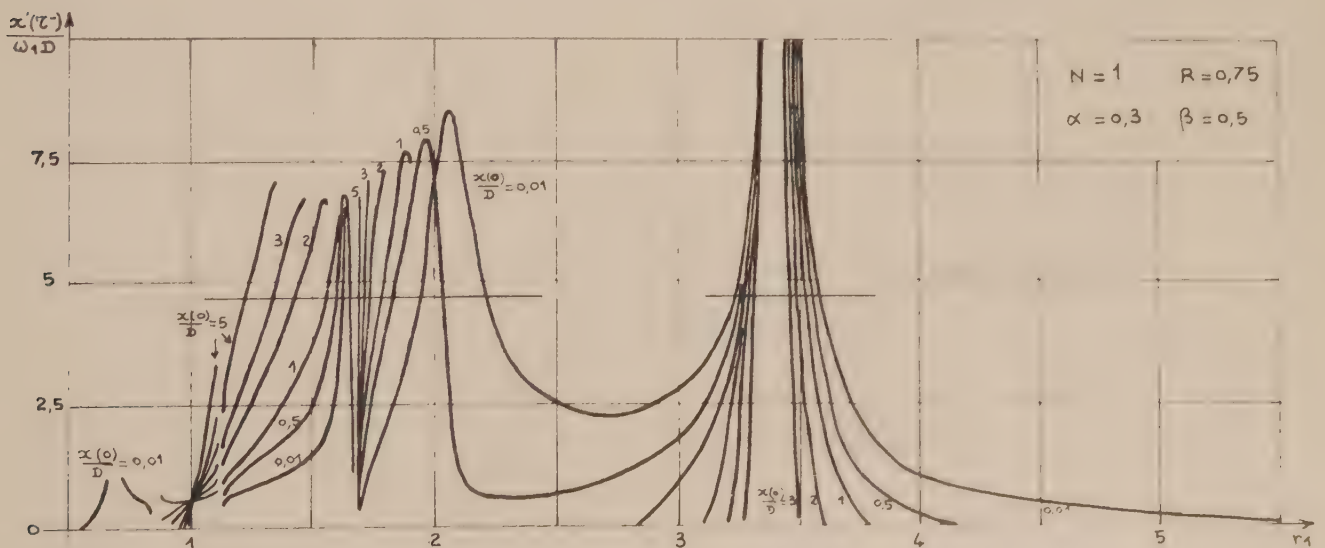
Ici  $D = \frac{m_b a}{m_2} = 0,01 \text{ m}$  en prenant  $m_b a = 0,25 \text{ kg.m}$

Cas d'un moteur hydraulique 5cv. à 1500 t/mm

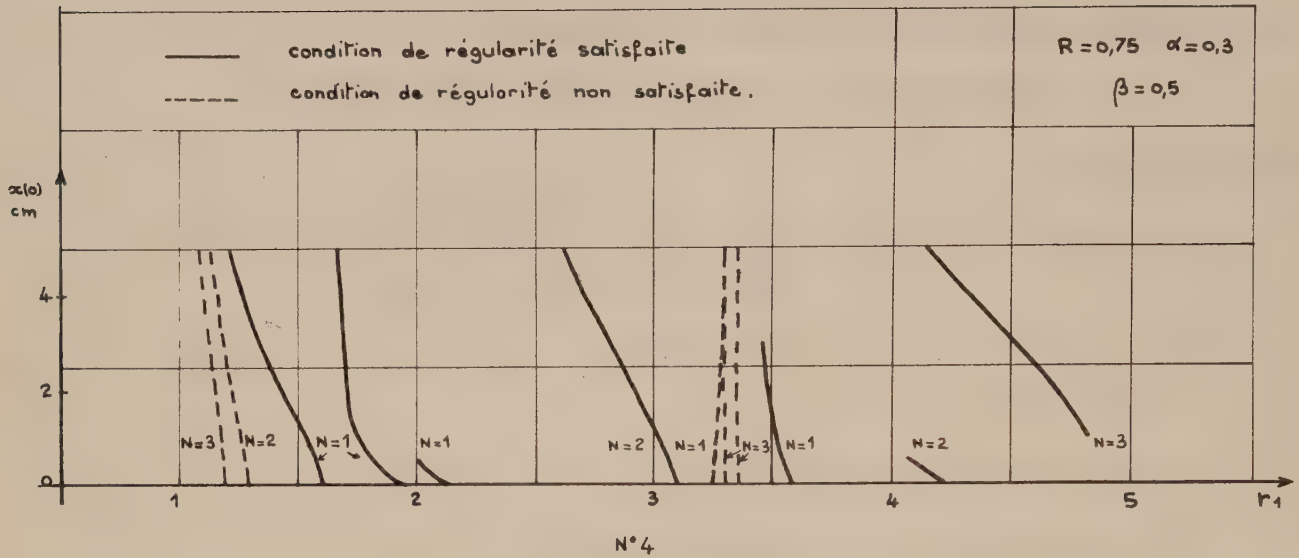
$\left| \frac{x'(\tau)}{\omega D} \right|$  max vaut alors :

| R    | N = 1 | N = 2 | N = 3 |
|------|-------|-------|-------|
| 0,25 | 3,19  | 4,51  | 5,53  |
| 0,50 | 3,57  | 5,04  | 6,18  |
| 0,75 | 4,67  | 6,60  | 8,00  |

Le graphe n° 3 tracé pour  $N = 1$  et  $R = 0,75$  montre l'application de la méthode exposée au § 3. Pour plus de clarté la condition de régularité des percussions est supprimée.



Le graphe n° 4 présente les résultats obtenus pour  $R = 0,75$  et  $N = 1, 2, 3$ . Seules les courbes de réglage de  $x(0)$  satisfaisant à la condition de régularité peuvent être considérées comme valables (il n'a pas été tenu compte des conditions de stabilité).



### 3ème PARTIE

Vérification expérimentale :

$$n = n^* = 1$$

$n = n^* = 2$  excitation unique sur  
la masse non percutante

excitations de type « balourds »

( cas des vibropercuteurs )

---



Nous nous proposons, dans cette troisième partie, de vérifier expérimentalement les résultats obtenus dans les deux premières pour les vibropercuteurs à 1 et 2 degrés de liberté sur butées fixes.

# 1 - SYSTEME MECANIQUE UTILISE -

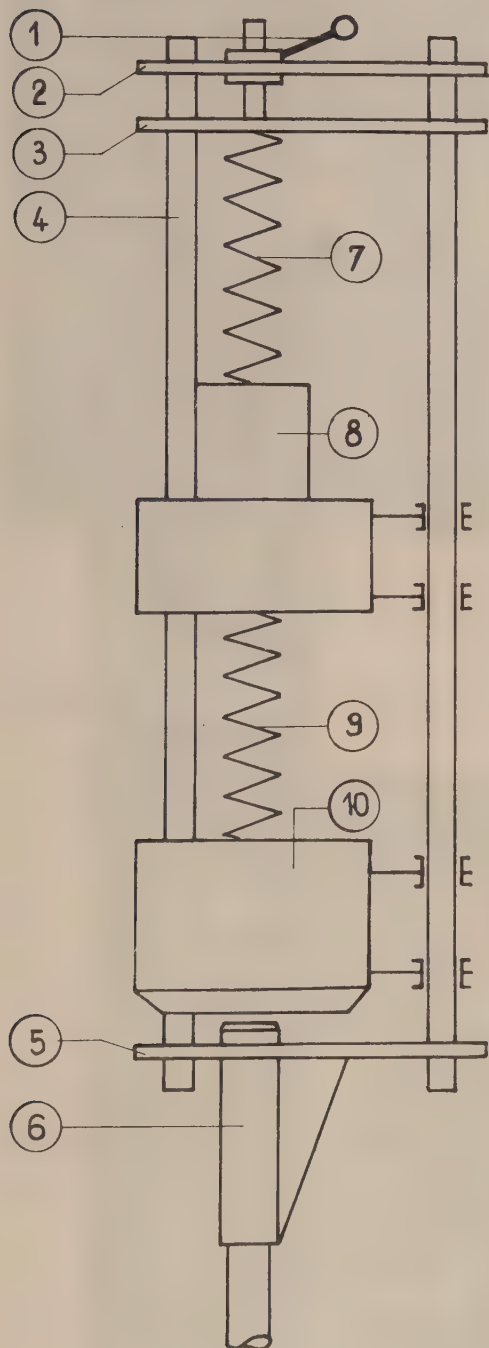


Fig 1

## 1,1 Schéma de principe (Fig. 1)

### Bati fixe

- 1 - volant de réglage de  $x(o)$
- 2 - plateau supérieur fixe
- 3 - plateau support du système vibrant
- 4 - colonnes de guidage
- 5 - plateau inférieur fixe
- 6 - pieu fixe, scellé dans un massif en béton

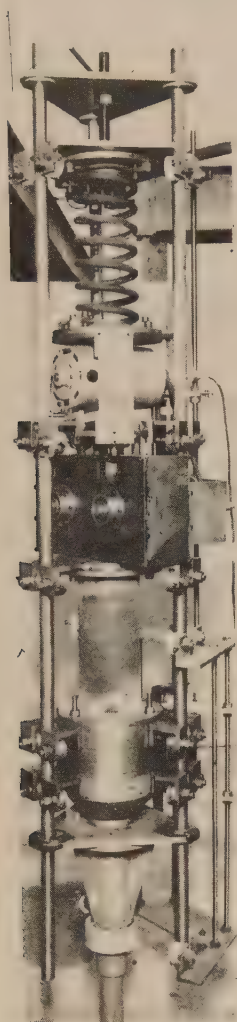
### Système vibrant (2 degrés)

- 7 - ressort supérieur  $k_2$
- 8 - masse excitatrice  $m_2$  comprenant :
  - 1 moteur électrique
  - 1 boîte de 4 balourds
- 9 - ressort inférieur  $k_1$
- 10 - masse percutante  $m_1$

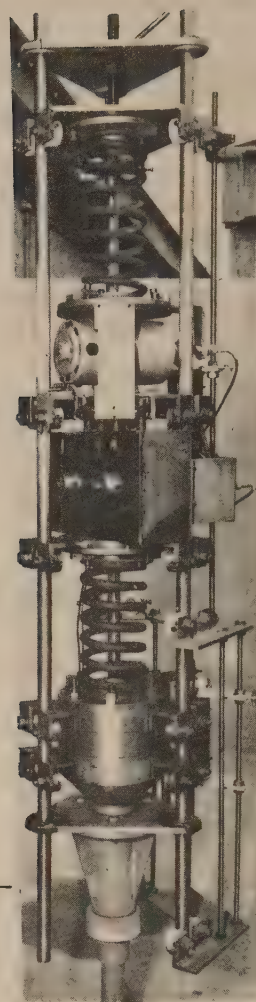
### Système vibrant (1 degré)

Le ressort  $k_1$  (n° 9) est remplacé par une entretoise rigide en acier.

### 1,2 Photographies d'ensemble



1° de liberté



2° de liberté

### 1,3 Détails techniques

Excitation : L'excitation est réalisée par un moteur électrique à courant continu, d'un 1/2 C.V. entraînant, par l'intermédiaire d'une courroie, deux engrenages identiques tournant en sens opposé. De part et d'autre de ces engrenages sont montés 4 balourds demi-cylindriques.

Il est possible de décaler, respectivement deux à deux, ces balourds pour modifier la valeur de l'excitation.



balourds à 0 (superposés)



balourds à  $\frac{\pi}{4}$

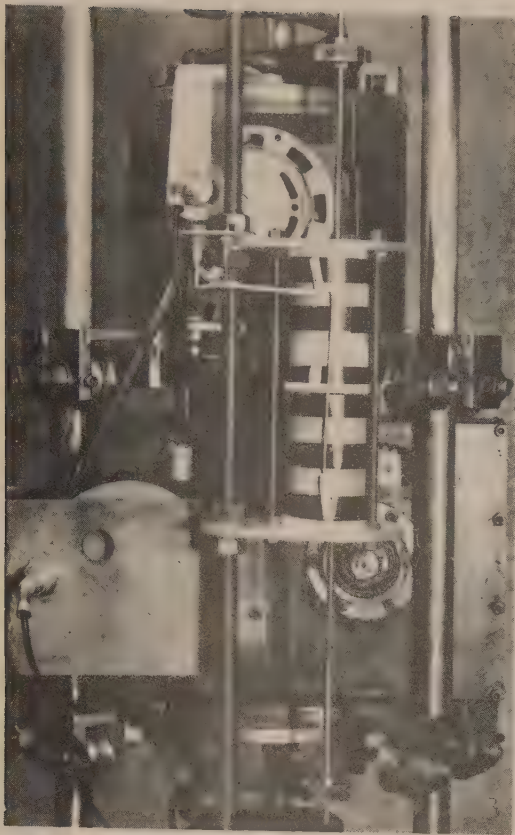


balourds à  $\frac{\pi}{2}$  (en croix)



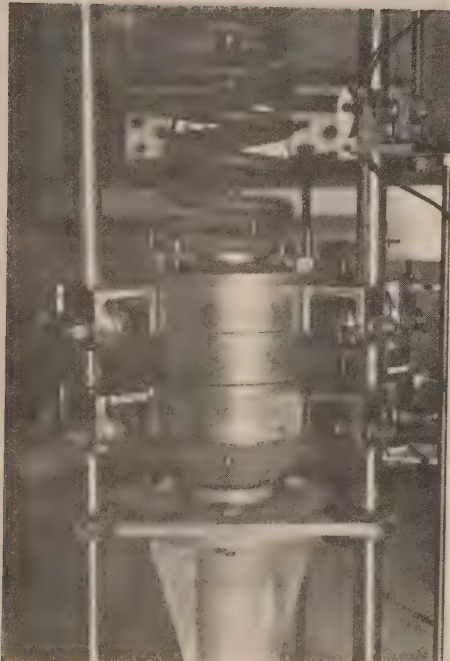
balourds à  $\frac{3\pi}{8}$

Fig. 2



N° 3 : excitation

### Guidage

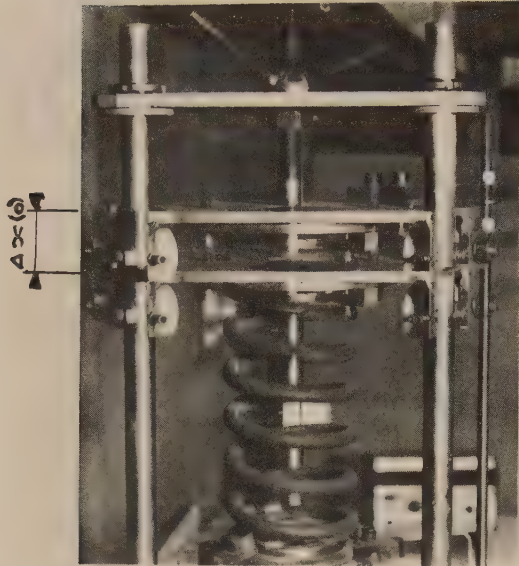


Pour obtenir des déplacements parfaitement verticaux et éviter toute rotation des masses en mouvement, chaque masse est guidée par des roulettes en duralumin montées sur roulement à billes.

N° 4 : Guidage du percuteur.

## Réglage de l'interstice

Le déplacement vertical de l'ensemble vibrant est réalisé, à partir du plateau supérieur, par le volant de réglage.



N° 5 : modification de l'interstice  $x(o)$   
d'une quantité  $\Delta x(o)$

## 2 - PRINCIPES DES MESURES -

### 2,1 Mesure de la période d'excitation

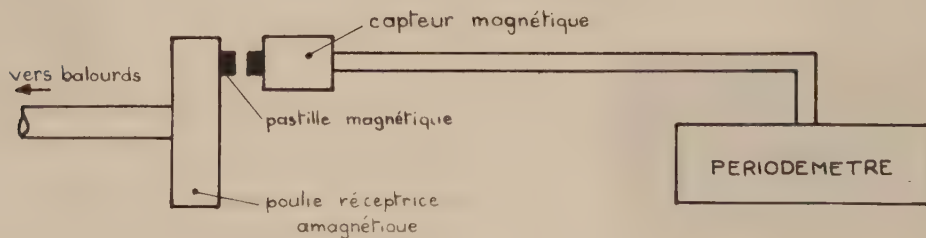


Fig 3

Une pastille magnétique, collée sur la poulie solidaire de l'un des deux engrenages de la boîte à balourds, déclenche un "top" chaque fois qu'elle passe devant le capteur. Un périodémètre permet de mesurer le temps écoulé entre deux tops consécutifs.

## 2,2 Mesure des vitesses

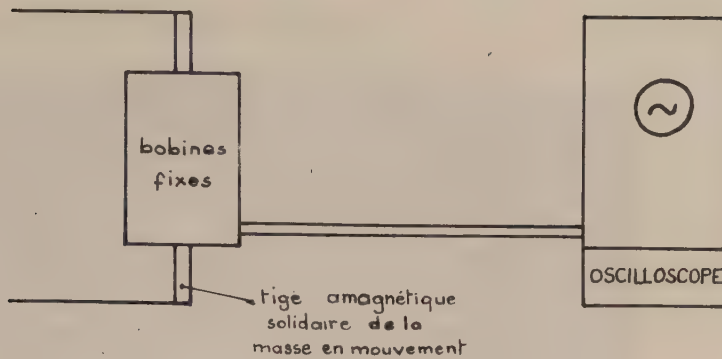


Fig 4

Un capteur de vitesses envoie un signal électrique sur un oscilloscope, signal proportionnel en tension à la vitesse à mesurer.

### Principe d'un capteur de vitesses

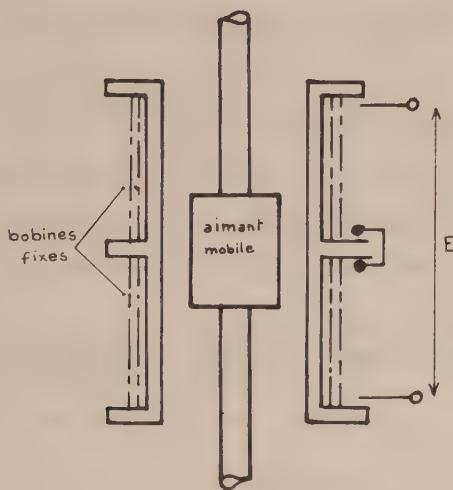


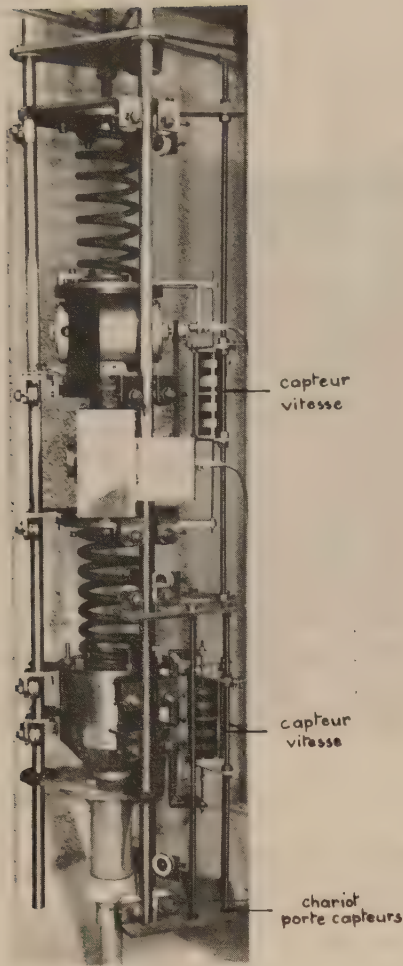
Fig 5

Chaque capteur est constitué par deux bobines fixes, montées en opposition, et d'un aimant mobile lié à la masse dont la vitesse est mesurée.

La variation du flux engendré par le déplacement de l'aimant, crée aux bornes de l'ensemble des deux bobines une différence de potentiel  $E$  proportionnelle à la vitesse instantanée de la masse.

$$x' = k \cdot E$$

Le coefficient constant  $k$  est obtenu par un étalonnage préalable en régime sinusoïdal forcé sans percussion.



Les deux capteurs de vitesses sont reliés rigidement au plateau support du système vibrant. Ainsi toute modification de la valeur de l'interstice n'entraîne pas de dérèglage des "zéros" de ces capteurs.

N° 6 : montage des capteurs de vitesses.

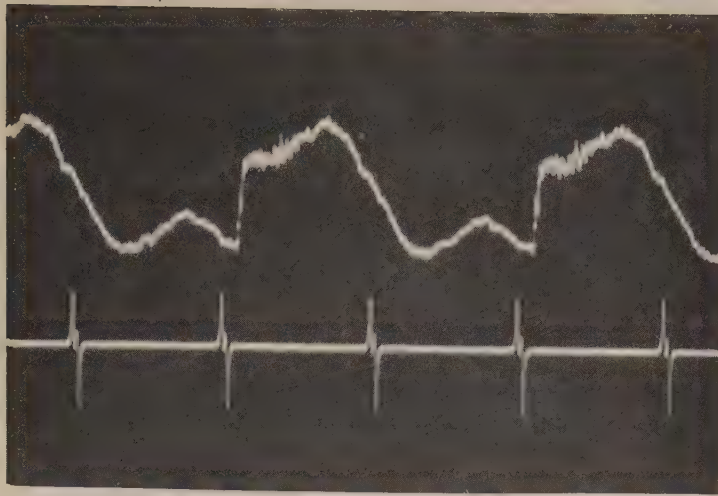
### 2,3 Déplacement du percuteur

Le déplacement du percuteur sera connu, à chaque instant, en intégrant le signal vitesse correspondant.

### 2,4 Mesure de l'interstice

L'interstice réel  $x(0)$  sera mesuré à l'aide d'un comparateur au 1/100 mm fixé sur la carcasse du vibropercuteur.

2,5 Mesure du nombre  $N$  de cycles décrits par l'excitation entre deux percussions consécutives



← signal vitesse du percuteur

← tops

N° 7 Mesure de  $N$  ( $N = 2$ )

$N$  est égal au nombre de "tops" émis par le capteur magnétique entre deux percussions consécutives.

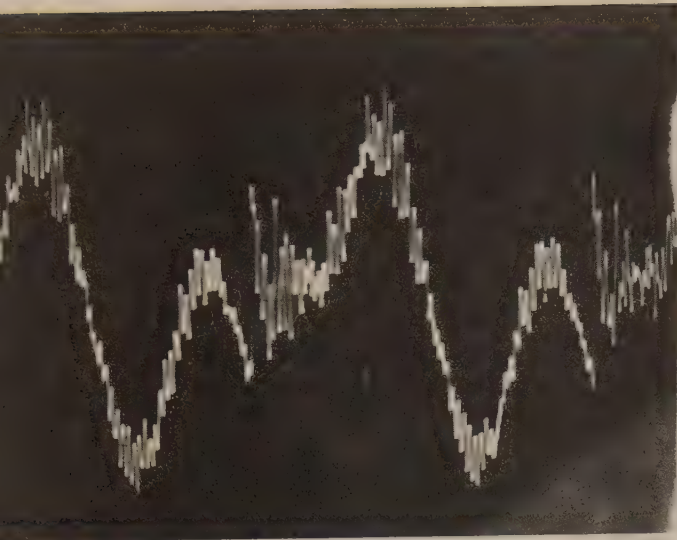
3 - CHAÎNE ELECTRONIQUE DE MESURES -

3,1 Filtres

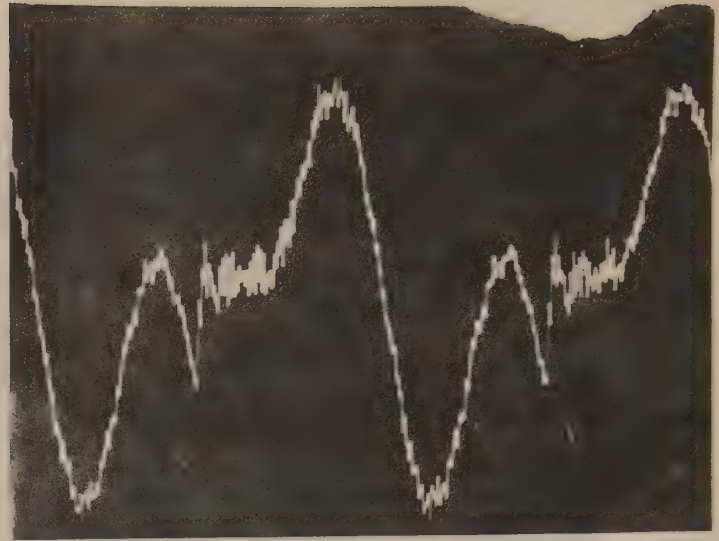
Une percussion excite l'ensemble et chaque élément d'une structure à leurs fréquences propres respectives. Les vibrations qui en résultent dépendent notamment de l'intensité et de l'emplacement de la percussion, des modes de vibrations, de la valeur des raideurs et masses excitées.

Dans notre cas il en résulte que les déplacements des masses ne sont pratiquement pas influencés par les vibrations parasites (colonnes, capteurs etc...) mais que, par contre, ces dernières perturbent notablement les signaux vitesses.

Pour éliminer, tout au moins partiellement, les vibrations parasites sur les signaux vitesses nous utiliserons des filtres en double T ponté.



N° 8 Signal vitesse sans filtre



N° 9 Même signal initial que celui de la photo n° 8, après filtrage

Nota : Toutes les mesures de la vitesse de percussion  $x'(\tau^-)$  seront effectuées sans filtre ; la perturbation du signal vitesse s'amortissant rapidement, la lecture directe de  $x'(\tau^-)$  est assez aisée.

### 3,2 Chaîne électronique de mesures

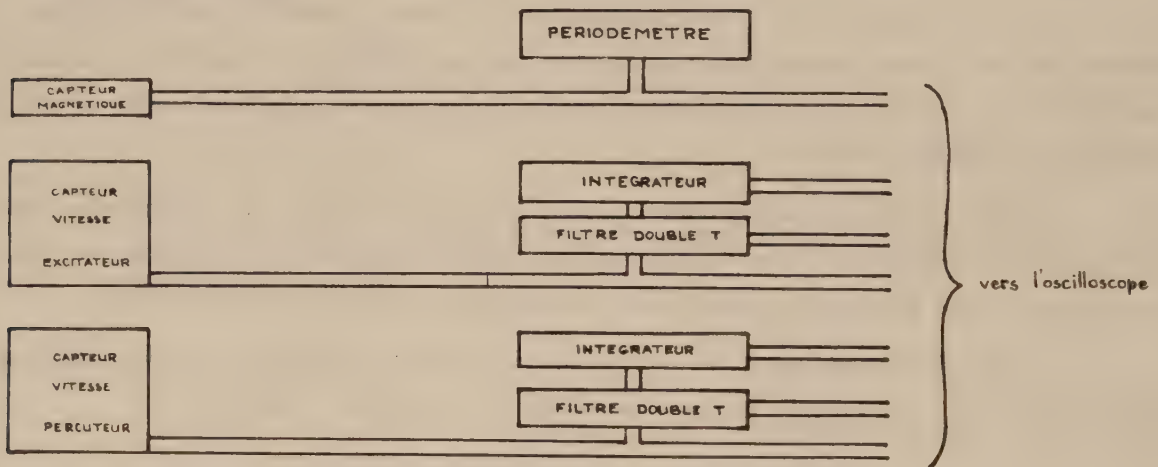


Fig 6

## 4 - MESURES PRELIMINAIRES -

### 4,1 Raideurs des ressorts

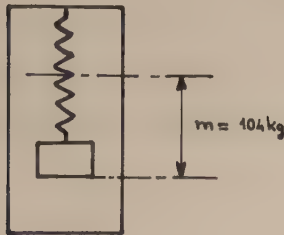
$$k_1 = 77500 \text{ N/m } (2^\circ)$$

$$k_2 = k = 40700 \text{ N/m } (1^\circ, 2^\circ)$$

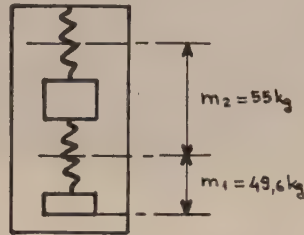
#### 4,2 Masses en mouvement

En première approximation nous pouvons estimer que chaque masse a pour valeur :

- percuteur : masse propre (\*) plus 1/2 masse du ressort  $k_2$
- exciteur : masse propre (\*) plus 1/2 masse des ressorts  $k_1$  et  $k_2$



1°



2°

#### 4,3 Pulsations propres

En traçant expérimentalement les courbes de résonance du système vibrant en régime forcé sans percussion (cf. 2° partie : chap. 1, Fig. 1 - chap. 2, Fig. 1) nous obtenons :

1° de liberté  $\omega_0 = 19,34 \text{ rad./s.}$

2° " "  $\omega_1 = 18,372 \text{ rad./s.}$   $\omega_2 = 57,75 \text{ rad./s.}$

#### 4,4 Valeurs de $\alpha$ et $\beta$ (cas. du 2° de liberté)

$$\alpha = \frac{\omega_1}{\omega_2} \neq 0,315 \text{ expérimental}$$

$$\beta = \frac{\omega_{02}}{\omega_2} \neq 0,695 \text{ théorique}$$

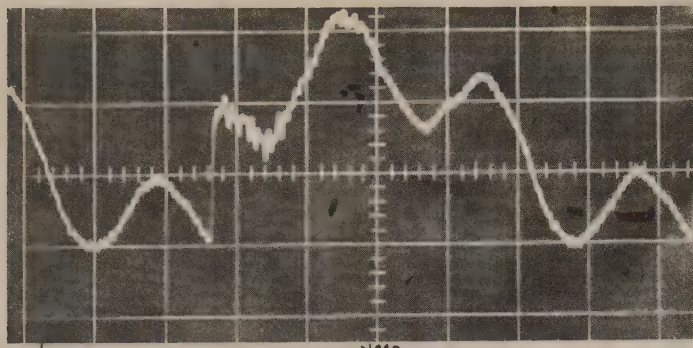
La valeur de  $\omega_{02} = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$  ne peut être calculée qu'à partir de la valeur estimée de  $m_2$ .

#### 4,5 Valeurs de D

| Calage des balourds | 1° de liberté<br>$D = \frac{m_{ba}}{m}$<br>en mm. | 2° de liberté<br>$D = \frac{m_{ba}}{m_2}$<br>en mm. |
|---------------------|---------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| 0                   | 1,05                                              | 1,98                                                |
| $\pi/4$             | 0,97                                              | 1,84                                                |
| $\pi/2$             | 0,74                                              | 1,40                                                |
| $3\pi/8$            | 0,40                                              | 0,76                                                |

(\*) Y compris tous les accessoires fixés sur cette masse.

#### 4,6 Valeur du coefficient de restitution de vitesse R



Par définition

$$R = \left| \frac{x'(\tau^+)}{x'(\tau^-)} \right|$$

En moyenne  $R = 0,80$ .

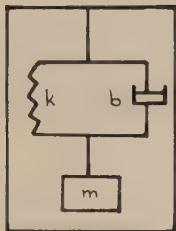
Il sera supposé constant pour comparer les résultats théoriques et expérimentaux.

### 5 - VERIFICATIONS DES HYPOTHESES -

#### 5,1 Le système vibrant n'est pas amorti

Tout système mécanique soumis à un mouvement vibratoire est plus ou moins amorti. Pour notre système, les forces d'amortissement peuvent être supposées proportionnelles aux vitesses des masses.

##### Cas du 1° de liberté



L'équation du mouvement en présence d'amortissement s'écrit :

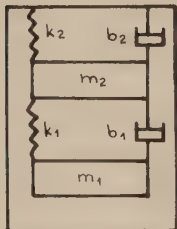
$$mx'' + bx' + kx = E \cos.(\Omega t + \phi)$$

L'amortissement peut se caractériser par un coefficient :

$$\mu = \frac{b}{2m\omega_0}$$

Nous obtenons expérimentalement  $\mu \approx 0,25\%$  ce qui est très faible.

##### Cas du 2° de liberté



L'équation matricielle du mouvement devient :

$$MX'' + BX' + KX = F$$

avec :

$$M = \begin{vmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} b_2 & -b_2 \\ -b_2 & b_1 + b_2 \end{vmatrix}$$

$$K = \begin{vmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_1 + k_2 \end{vmatrix} \quad F = \begin{vmatrix} 0 \\ E \cos.(\Omega t + \phi) \end{vmatrix}$$

L'amortissement peut se caractériser par les coefficients :

$$\mu_1 = \frac{b_1}{2m_1\omega_{01}} \quad \text{avec} \quad \omega_{01} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$$

$$\mu_2 = \frac{b_2}{2m_2\omega_{02}} \quad \text{avec} \quad \omega_{02} = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$$

expérimentalement  $\mu_1 \approx 0,25 \%$  et  $\mu_2 \approx 0,35 \%$ , valeurs suffisamment faibles pour être négligées en première approximation.

### 5,2 Les ressorts sont parfaitement linéaires et de masses négligeables

Les ressorts utilisés sont effectivement linéaires mais leurs masses ne peuvent être négligeables ; c'est pourquoi il en est tenu compte dans la valeur de chaque masse en mouvement (cf. § 4,2).

Pratiquement cette hypothèse peut être remplacée par : "*le système vibrant est linéaire*" c'est-à-dire qu'en régime sinusoïdal forcé sans percussion, les relations suivantes doivent être vérifiées :

$$x = \frac{Dr^2}{1-r^2} \cos \Omega t \quad (1^\circ)$$

$$x = \frac{D\beta^2 r_1^2}{(1-r_1^2)(1-\alpha^2 r_1^2)} \cos \Omega t \quad (2^\circ)$$

Le tracé des courbes de résonance nous permet d'affirmer que l'expérience confirme bien cette hypothèse.

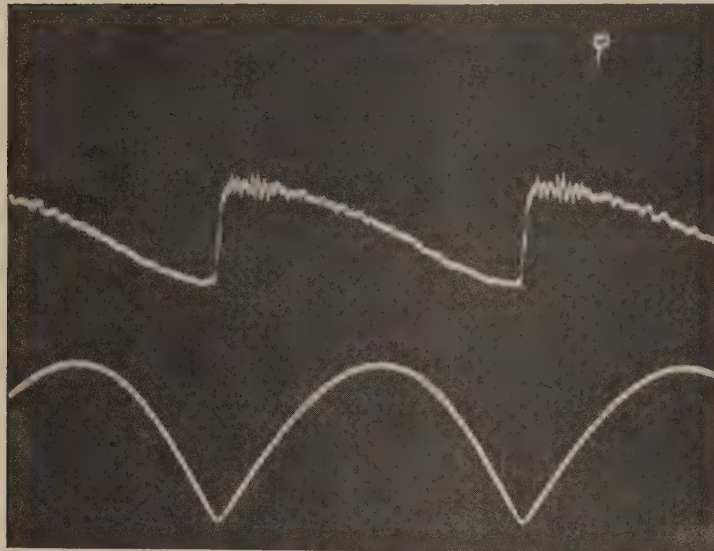
### 5,3 Les percussions sont instantanées

Physiquement une percussion n'est jamais instantanée. Cependant, dans notre cas, une percussion dure environ 1/1000 s. alors que le temps qui s'écoule entre deux percussions consécutives varie de 1/10 à 1/2 s. ; l'approximation est par conséquent très bonne.

L'illustration de la validité de cette hypothèse apparaît sur toutes les photographies présentant la vitesse du percuteur en fonction du temps.

5.4 Les déplacements des masses sont continus

Cette hypothèse est parfaitement confirmée.

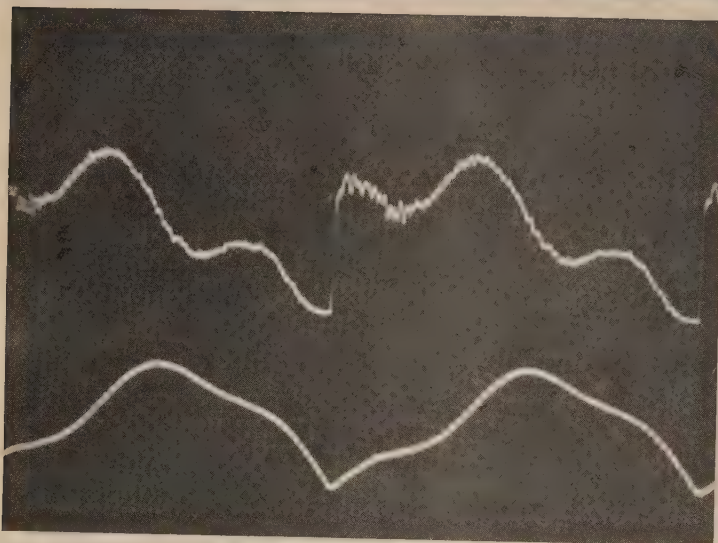


N° 11 1° de liberté

← vitesse du percuteur

→  
t

← déplacement du percuteur



N° 12 - 2° de liberté

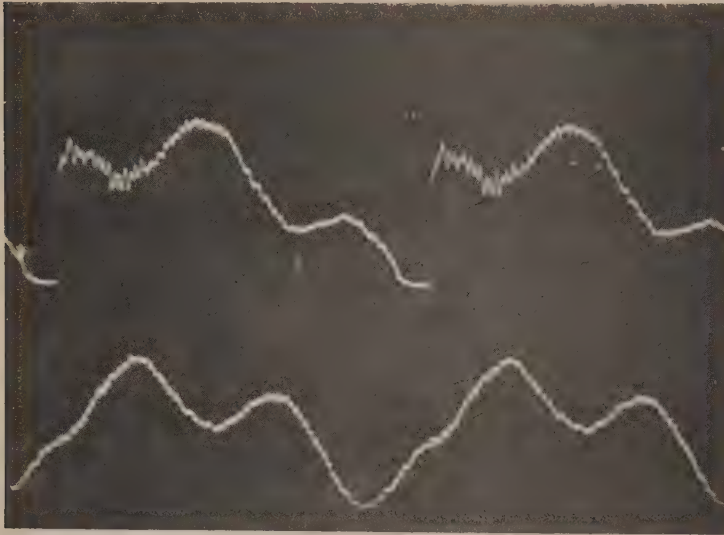
← vitesse du percuteur

→  
t

← déplacement du percuteur

5,5 Les vitesses des masses sont continues à l'exception de celle du percuteur.

Il est évident que cette dernière hypothèse ne s'applique qu'au système à 2° de liberté. L'expérience la vérifie toujours.

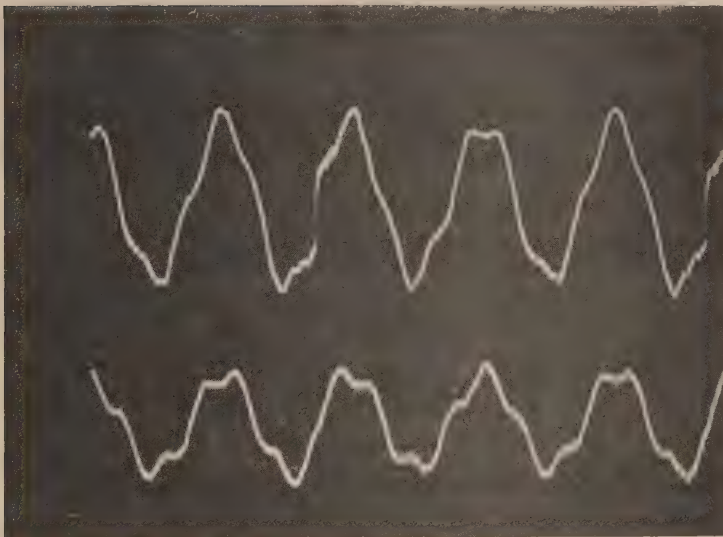


N° 13 2° de liberté

← vitesse du percuteur

→  
t

← vitesse de l'excitateur



N° 14 . 2° de liberté

← vitesse du percuteur .

→  
t

← vitesse de l'excitateur

## 6 - RESULTATS EXPERIMENTAUX -

### 6,1 Présentation des résultats

Nous porterons sur les graphes théoriques de  $\frac{x'(\tau^-)}{\omega_\ell D} = f(r_\ell)$   $\ell = 0$  pour  $1^\circ$ ,  $\ell = 1$  pour  $2^\circ$  les valeurs expérimentales afin d'établir directement une comparaison entre les résultats théoriques et expérimentaux.

Les graphes théoriques seront tracés en tenant compte de toutes les conditions nécessaires et suffisantes pour obtenir des percussions régulières, réelles et stables, à savoir :

- les conditions d'existence de percussion
- la condition de régularité des percussions
- la condition de stabilité
- la condition du minimum d'énergie dissipée par les percussions régulières

Nous publierons également certaines photographies relatives au nombre  $N$  de cycles décrits par l'excitation entre deux percussions consécutives.

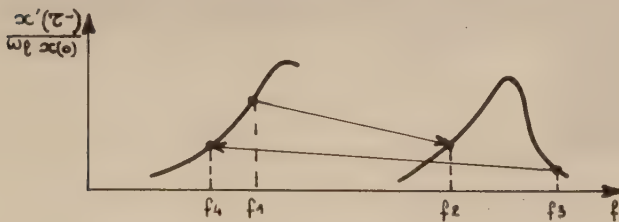
Nous publierons enfin quelques cycles limites du phénomène étudié ; chaque cycle étant la configuration de :

$$x'(t) = f [x(t)] ,$$

$x(t)$  et  $x'(t)$  étant respectivement le déplacement et la vitesse du percuteur au même instant  $t$ .

Remarque : Dans certaines plages d'excitation, il a été impossible de stabiliser le moteur à la fréquence désirée. Ces plages sont explicitées sur chaque graphe par des flèches dont la direction indique le sens du balayage en fréquence.

Exemple :



La fréquence d'excitation  $f$  croît à  $f_1$ , le moteur accélère et ne se stabilise qu'à  $f_2$ .

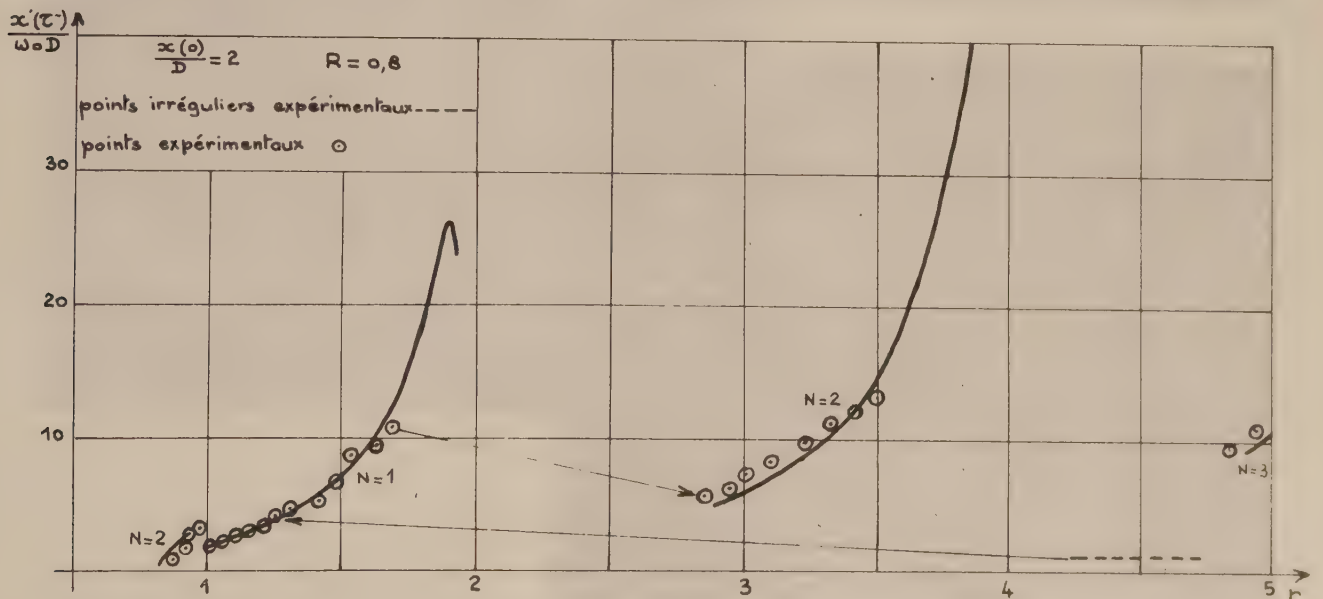
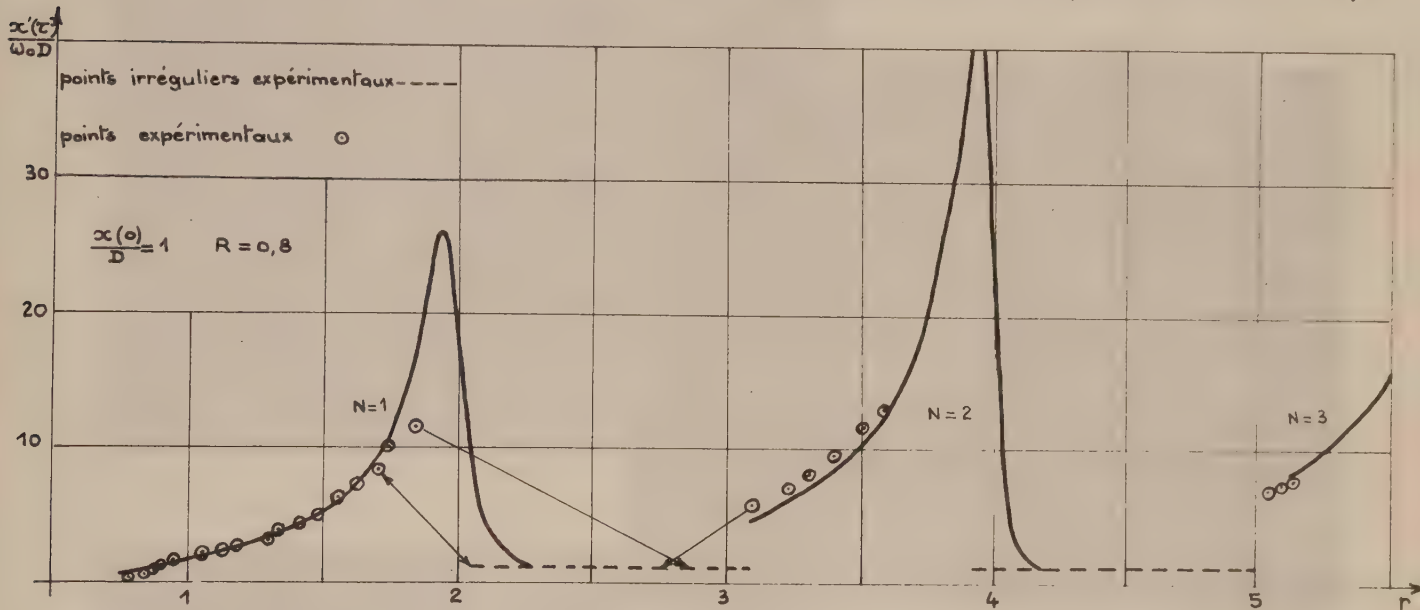
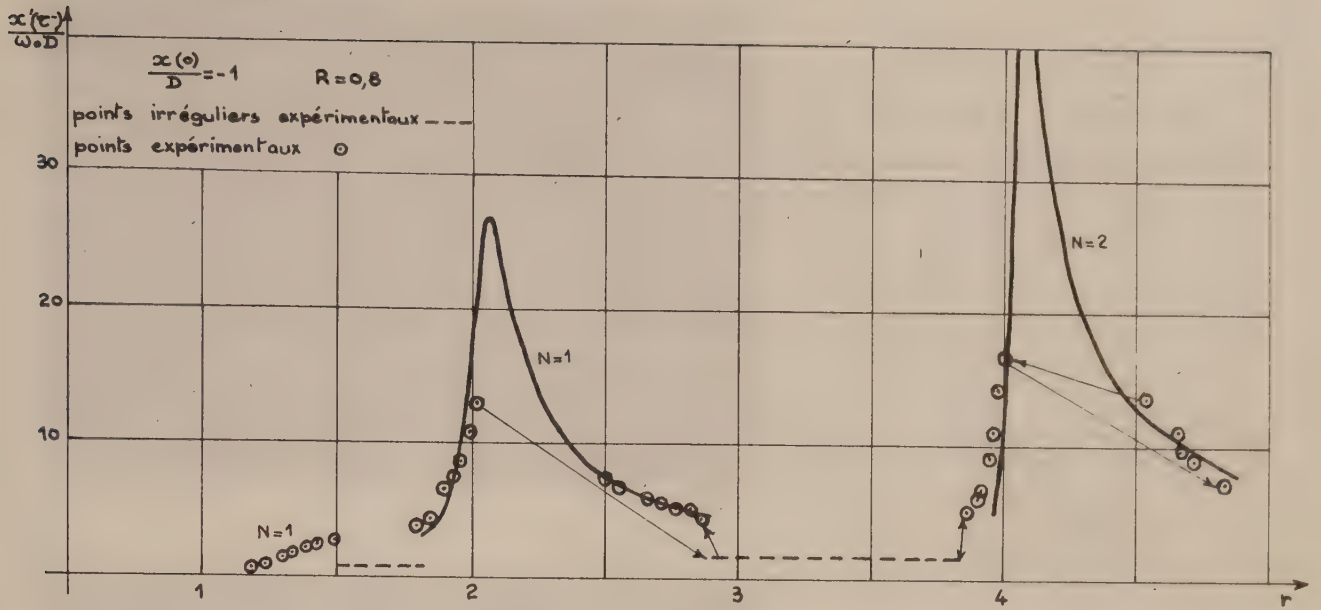
Inversement, la fréquence d'excitation diminuant, le moteur ralentit très rapidement de  $f_3$  à  $f_4$ .

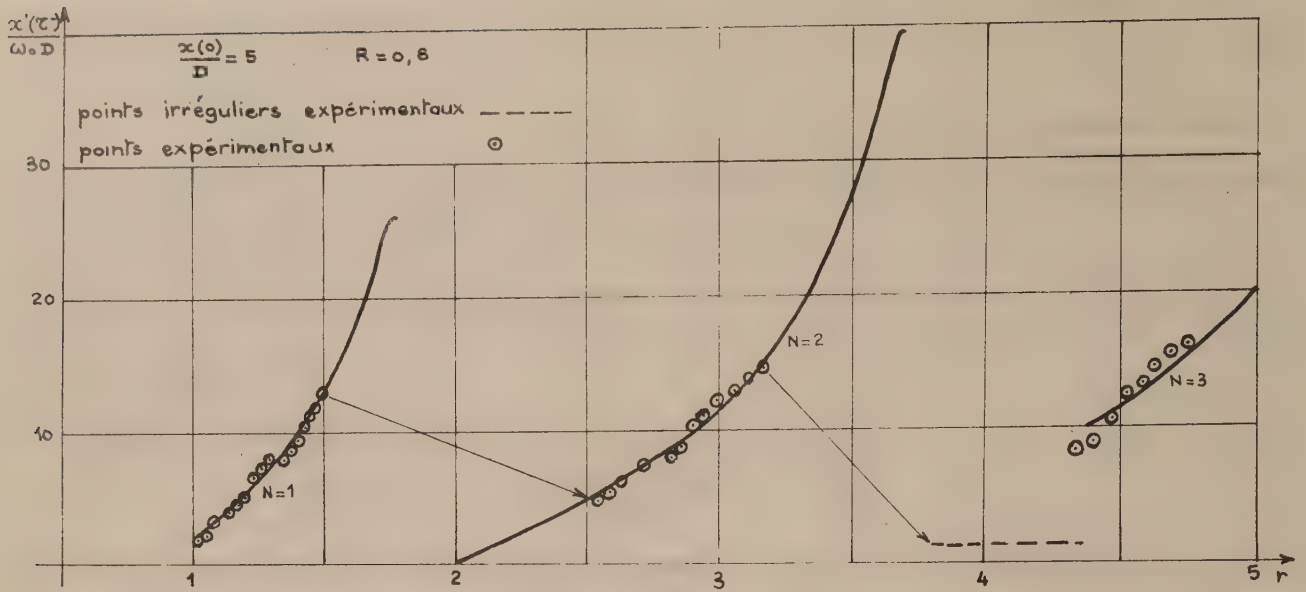
### 6,2 Système à 1° de liberté

Nous retiendrons comme valeurs de  $\frac{x(o)}{D}$  : - 1/1/2/5.

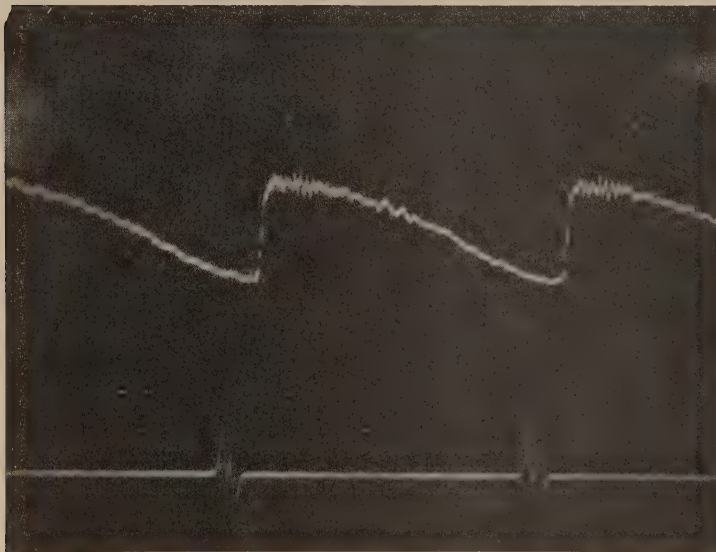
Pratiquement le coefficient de restitution de vitesse  $R$  sera pris égal à 0,8 pour comparer les résultats théoriques et expérimentaux.

## 6,2,1 Graphes





6,2,2 Photographies de la vitesse de percussion pour divers  $N$

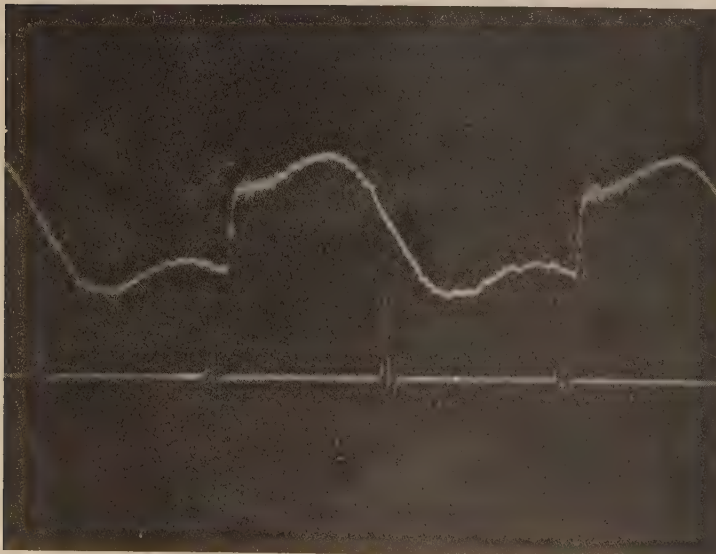


$$N = 1$$

$$\frac{x(0)}{D} = 1$$

$$r = 1,486$$

N° 15

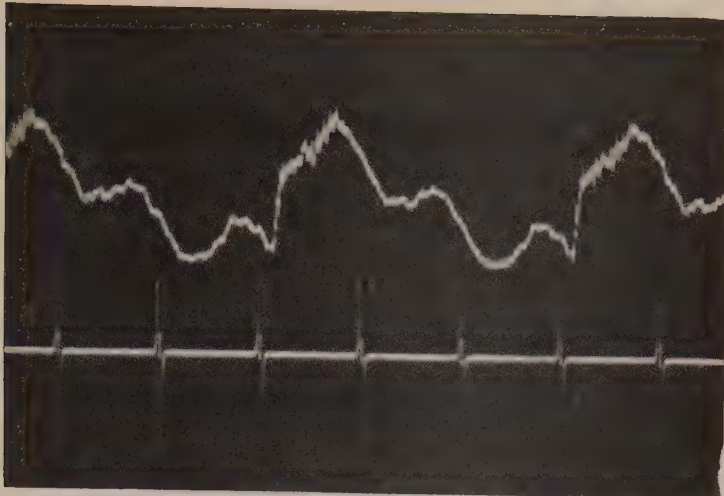


$$N = 2$$

$$\frac{x(0)}{D} = 5$$

$$r = 2,592$$

N° 16

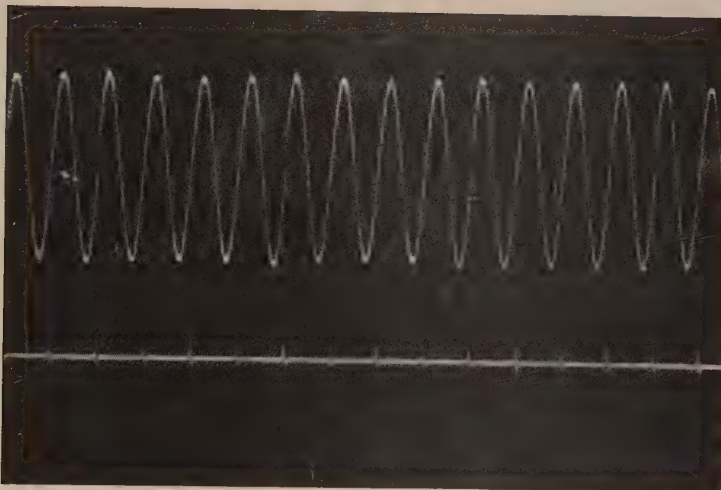


$$N = 3$$

$$\frac{x(o)}{D} = 5$$

$$r = 4,563$$

N° 17

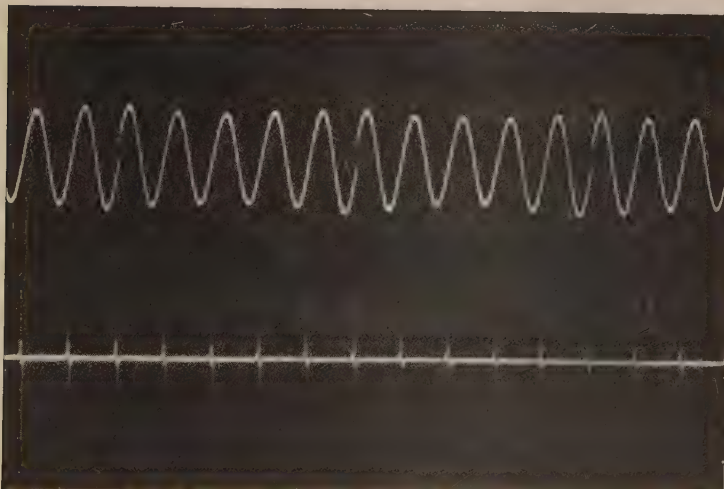


$$N = 4$$

$$\frac{x(o)}{D} = 1,25$$

$$r = 0,991$$

N° 18

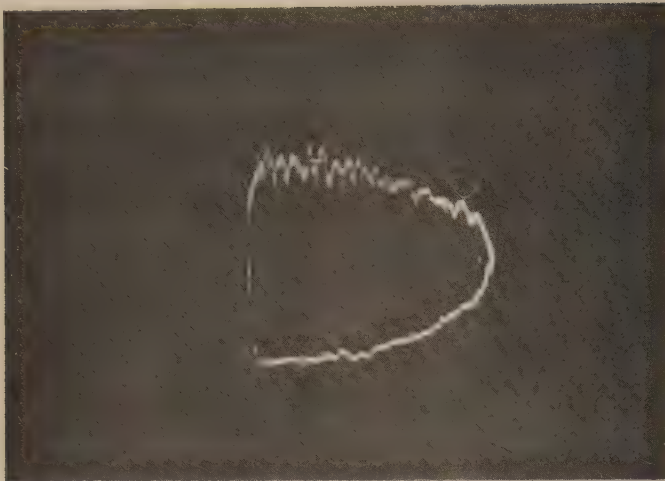


$$N = 5$$

$$\frac{x(o)}{D} = 8$$

$$r = 0,953$$

N° 19

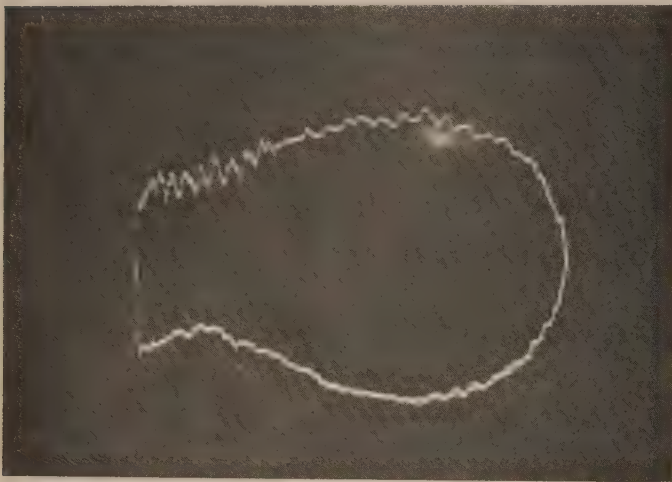
6, 2, 5 Cycles limites

$$N = 1$$

$$\frac{x(o)}{D} = 2$$

$$r = 1,486$$

$$N^{\circ} 20$$

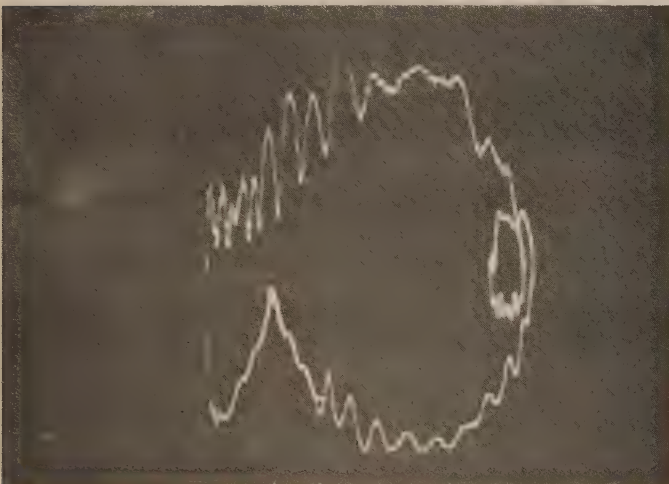


$$N = 2$$

$$\frac{x(o)}{D} = 5$$

$$r = 2,592$$

$$N^{\circ} 21$$

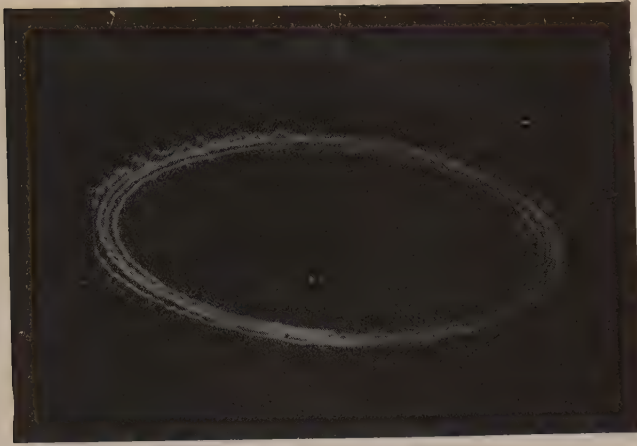


$$N = 3$$

$$\frac{x(o)}{D} = 1$$

$$r = 5,05$$

$$N^{\circ} 22$$



$$N = 5$$

$$\frac{x(0)}{D} = 8$$

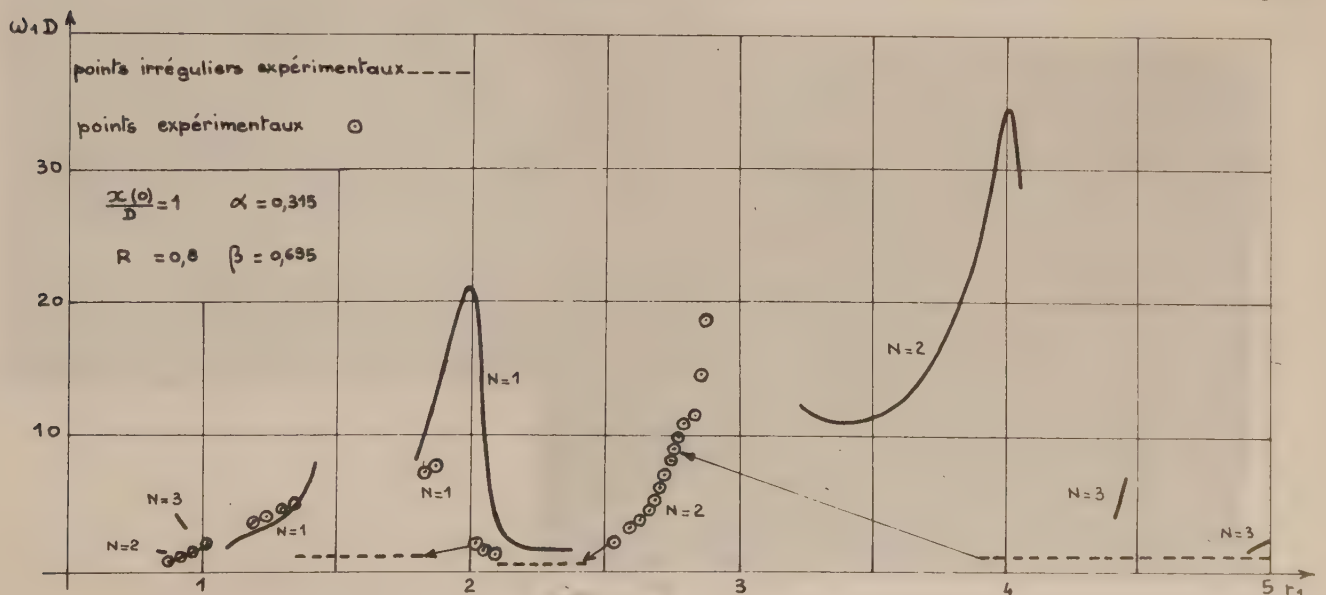
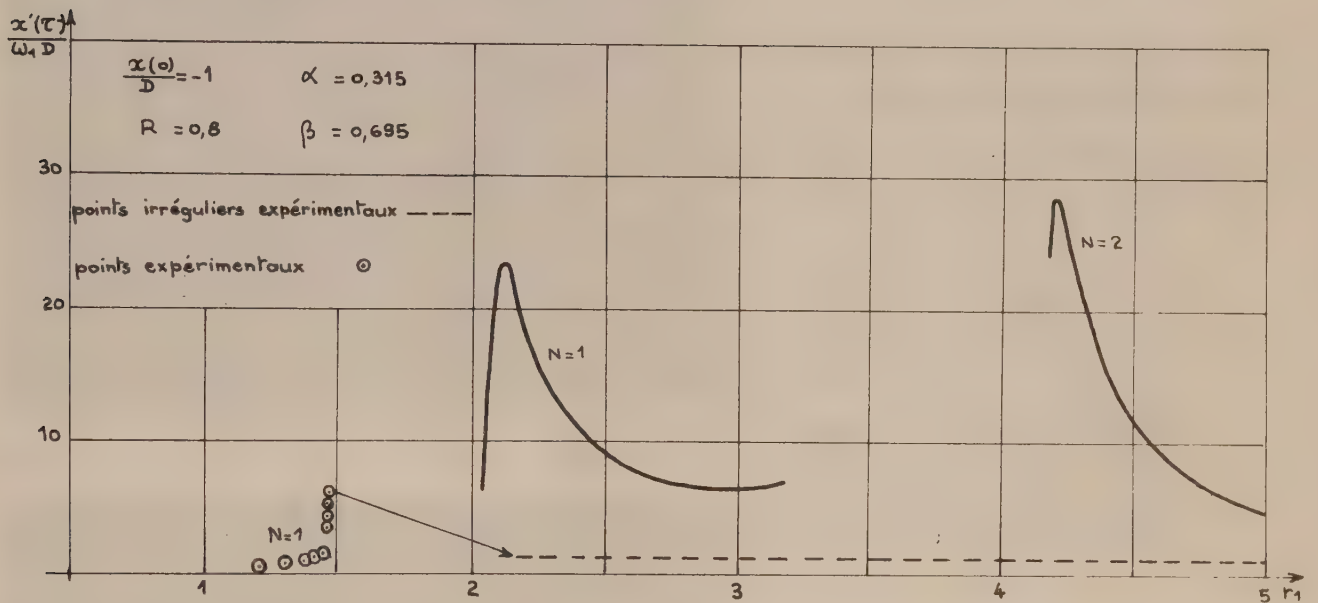
$$r = 0,953$$

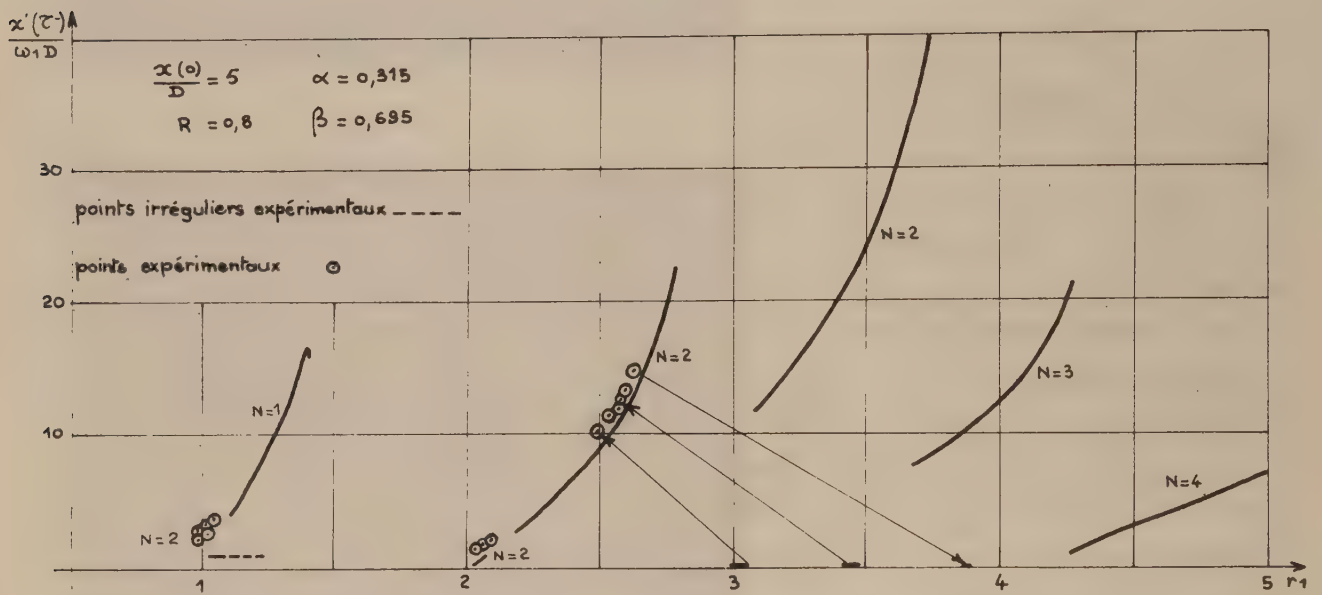
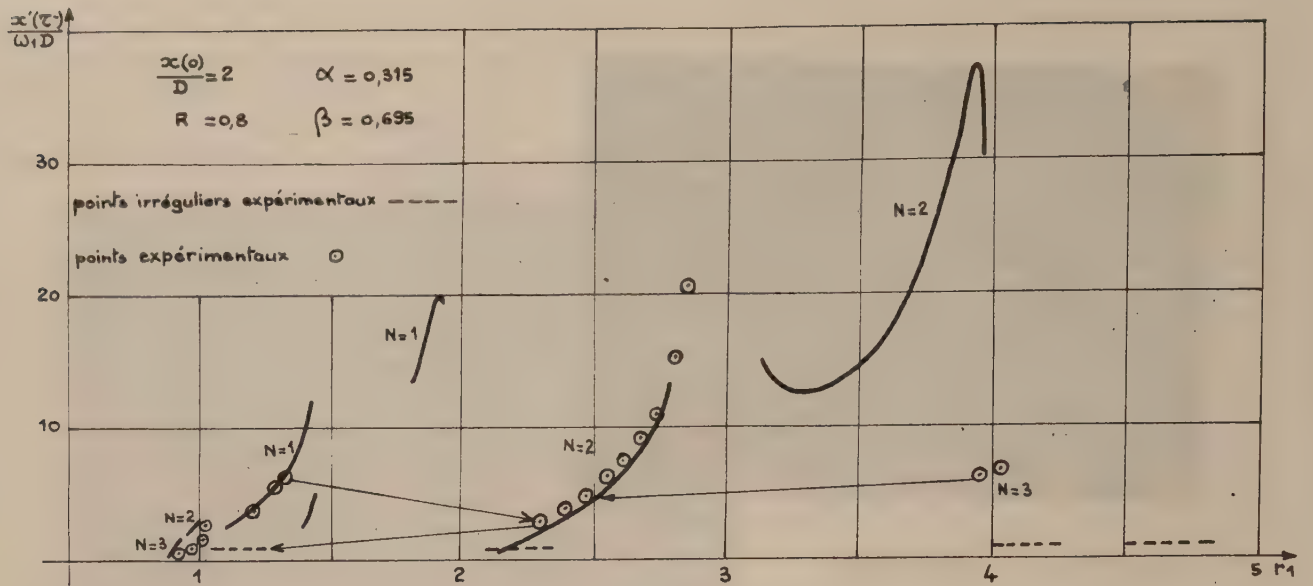
N° 23

### 6,3 Système à 2° de liberté

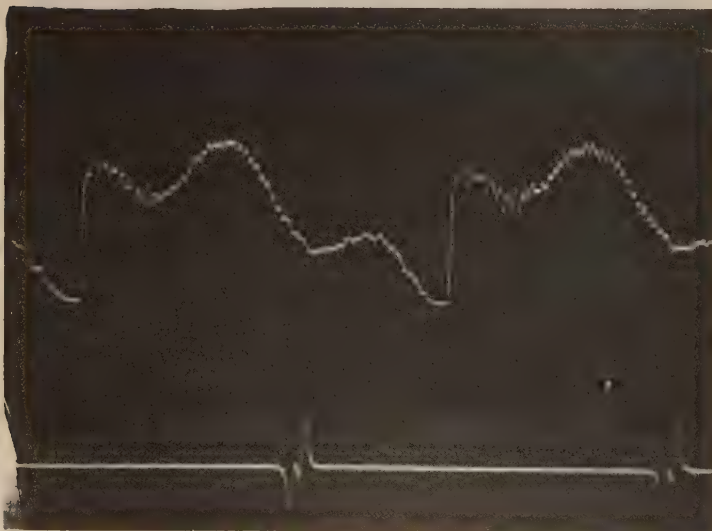
$$\frac{x(0)}{D} = -1/1/2/5 \quad R = 0,80 \quad \alpha = 0,315 \quad \beta = 0,695$$

#### 6,3,1 Graphes





6,3,2 Photographies de la vitesse de percussion pour divers  $N$

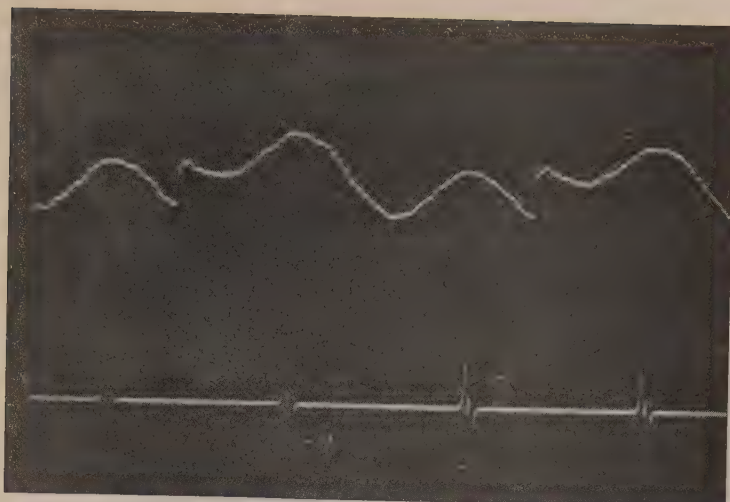


$N = 1$

$$\frac{x(0)}{D} = 2$$

$$r_1 = 1,275$$

N° 24

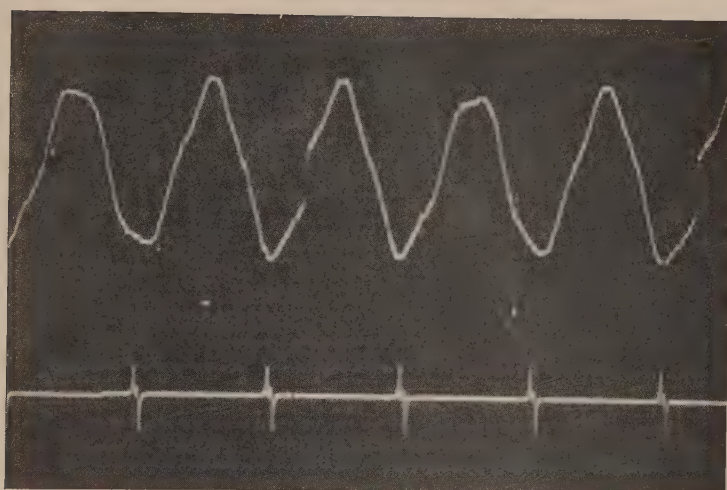


$$N = 2$$

$$\frac{x(o)}{D} = 2$$

$$r_1 = 2,672$$

N° 25

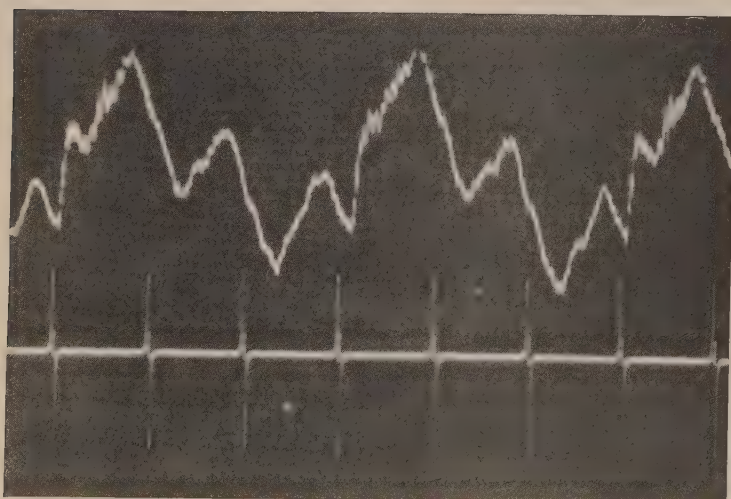


$$N = 3$$

$$\frac{x(o)}{D} = 2$$

$$r_1 = 0,912$$

N° 26

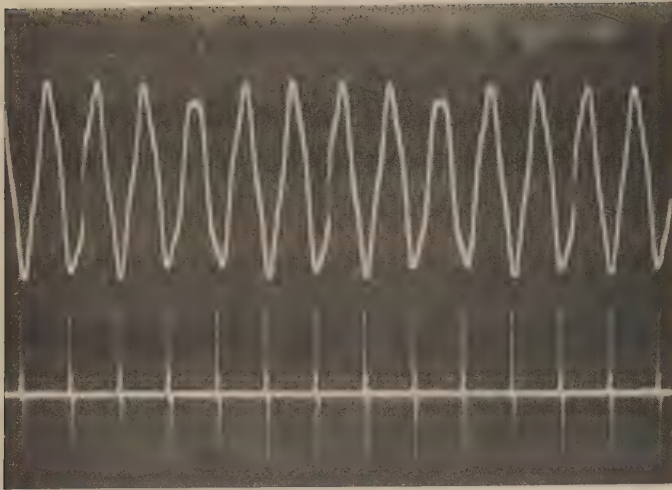


$$N = 3$$

$$\frac{x(o)}{D} = 2$$

$$r_1 = 5,105$$

N° 27



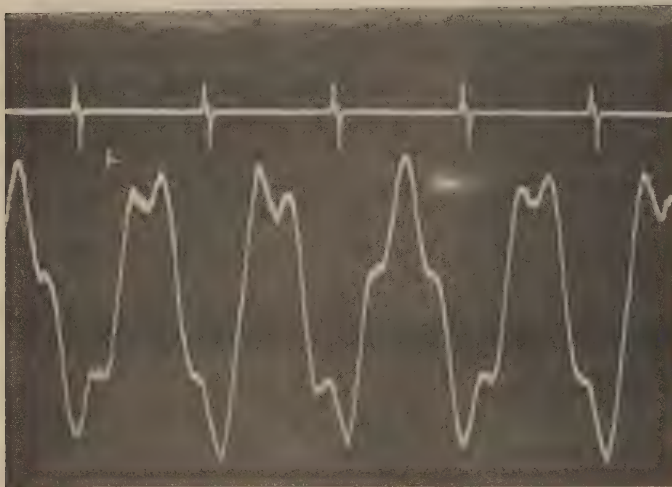
$$N = 5$$

$$\frac{x(o)}{D} = 5$$

$$r_1 = 0,96$$

$$N = 28$$

### 6,3,3 Photographie de la vitesse de l'excitateur



$$N = 3$$

$$\frac{x(o)}{D} = 2$$

$$r_1 = 0,912$$

$$N^{\circ} 29$$

### 6,3,4 Cycles limites

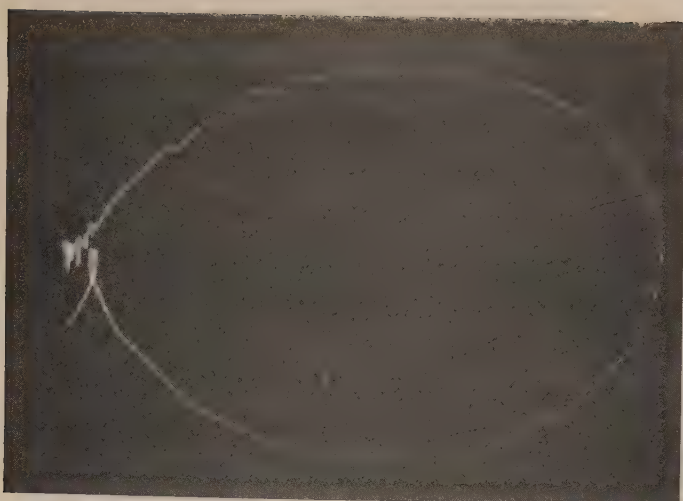


$$N = 1$$

$$\frac{x(o)}{D} = 2$$

$$r_1 = 1,275$$

$$N^{\circ} 30$$

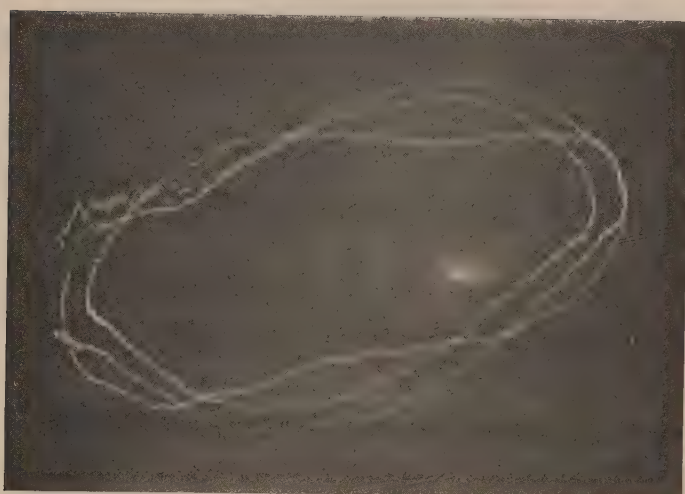


$$N = 2$$

$$\frac{x(o)}{D} = 1$$

$$r_1 = 2,672$$

N° 31

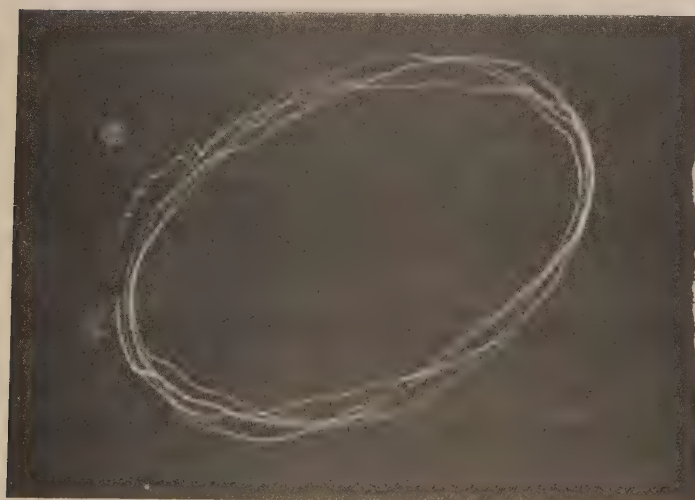


$$N = 3$$

$$\frac{x(o)}{D} = 2$$

$$r_1 = 0,912$$

N° 32



$$N = 5$$

$$\frac{x(o)}{D} = 5$$

$$r_1 = 0,96$$

N° 33

7 - ANALYSE DES RESULTATS EXPERIMENTAUX - CONCLUSION -

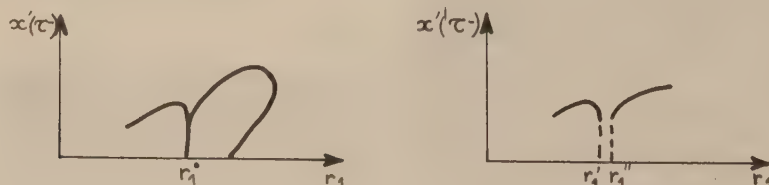
▲ L'expérimentation montre que :

- les percussions ne sont régulières que si et seulement si le nombre de cycles décrits par l'excitation entre deux collisions consécutives est un entier ;
- les phénomènes classiques de résonance n'existent plus lors des percussions ;
- la vitesse de percussion suit sensiblement les lois théoriques. Les écarts relevés proviennent :
  - des erreurs inhérentes à l'expérimentation et notamment à l'imprécision de la lecture de  $x'(\tau^-)$  sur l'oscilloscope ( $\pm 5\%$ ) ;
  - de la valeur du coefficient de restitution de vitesse  $R$  que nous avons supposé constant alors qu'il dépend de la vitesse de propagation de l'onde de contrainte dans le pieu, de l'intensité du choc, etc..;
  - de l'amortissement, négligé dans la théorie, qui tend à réduire l'amplitude des plages de percussions semi et non automatiques ;
  - de la condition du minimum d'énergie dissipée par les percussions

irrégulières. ▲ De plus l'expérimentation confirme :

- le caractère non linéaire des systèmes avec percussions et par suite la notion des plages automatiques, semi-automatiques et non automatiques définies dans la deuxième partie (chapitres 1 et 2) ;
- l'ensemble des lois qui régissent les plages de percussions réelles pour un système donné, lois exposées dans la première partie (chapitre 4) ;
- le fait que la vitesse de percussion devient pratiquement nulle chaque fois que  $\text{tg}\psi$ ,  $\text{tg}\psi_1$  ou  $\text{tg}\psi_2$  s'annulent (à l'exception de  $r = 1$ ,  $r_1 = 1$ ,  $\alpha r_1 = 1$  pour lesquels elle reste finie).

Ceci est vérifié également dans la plage de percussion automatique pour le système à 2 degrés de liberté.



pour  $r_1^0$ ,  $\text{tg}\psi_2 = 0$ , théoriquement  $x'(\tau^-) = 0$ , pratiquement la vitesse de percussion oscille entre deux valeurs faibles,  $r_1$  prenant successivement les valeurs  $r_1'$  et  $r_1''$ .

En conclusion, l'expérimentation confirme les résultats théoriques d'une façon satisfaisante, sauf en ce qui concerne l'amplitude des plages de percussions semi et non automatiques qui sont sensiblement plus réduites que celles prévues par la théorie.

## CONCLUSION

L'étude entreprise sur les vibrations forcées de systèmes constitués de masses et ressorts en série, sans amortissement, dont deux des masses entrent en collision lors du mouvement, nous a permis de dégager les lois essentielles qui régissent le phénomène proposé.

Nous retiendrons particulièrement :

▲ de la théorie générale des systèmes à  $n^*$  degrés de liberté :

- le caractère non linéaire du mouvement ;
- la disparition des phénomènes classiques de résonance ;
- la propriété fondamentale des percussions régulières *"le nombre de cycles décrits par chaque excitation entre deux collisions consécutives est un entier"* ;
- l'existence de percussions régulières réelles qui est liée :
  - à l'expression d'une vitesse de percussion réelle et positive ;
  - au déplacement relatif des masses percutantes ;
  - à la stabilité du mouvement ;
  - au minimum d'énergie dissipée par les collisions.

▲ de l'analyse complète des systèmes à 1 et 2 degrés de liberté :

- la notion de trois types de plages de percussions : automatiques, semi-automatiques et non automatiques ;
- la complexité des lois de variation de la vitesse de percussion en fonction des divers paramètres ;
- la nécessité du réglage aisé de l'interstice réel sur les vibropercuteurs pour en obtenir un rendement optimum ;
- les principes de base de la détermination des caractéristiques mécaniques des vibropercuteurs à 1 ou 2 degrés de liberté.

▲ de la vérification expérimentale

- qui a confirmé les résultats théoriques d'une façon satisfaisante,
- que les amplitudes réelles des plages de percussions régulières sont sensiblement plus réduites que celles prévues par la théorie.



## PERSPECTIVES

L'un des domaines importants de la dynamique des sols réside en l'application des phénomènes dynamiques à l'enfoncement des pieux et palplanches.

Le vibropercuteur à 1 degré de liberté est utilisé depuis plus de 30 ans. Cependant l'exploitation rationnelle de ce système est assez récente, surtout en France, car les effets dynamiques dus aux percussions sur les moteurs électriques sont très néfastes ; l'emploi de moteurs hydrauliques a été un progrès sensible.

Le vibropercuteur à 2 degrés de liberté n'est pratiquement pas utilisé, étant mal connu et plus lourd que celui à un degré de liberté.

Nous pensons, pour notre part, que ce système mérite une expérimentation poussée sur les sols en place. Expérimentation qui devrait permettre d'en ouvrir largement son champ d'application, étant donné son avantage fondamental : l'excitateur ne subit aucun effet de choc.

A cet effet nous avons mis au point un vibropercuteur à deux degrés de liberté, excité par balourds entraînés par un moteur hydraulique, présentant les particularités suivantes :

- réglage de l'interstice réel par un dispositif hydraulique
- réglage aisé des raideurs des ressorts
- possibilité de battage et contre battage.

Nous nous proposons d'étudier l'influence de la vitesse de percussion sur la vitesse d'enfoncement de pieux, l'influence de la propagation des ondes de contraintes sur le coefficient de restitution de vitesse, et d'essayer de déterminer les réglages optimums du vibropercuteur en fonction des caractéristiques intrinsèques des sols.

Il sera aussi intéressant d'étudier, sur le plan théorique, l'influence de la mobilité de la butée sur la vitesse de percussion ainsi que d'exprimer celle-ci en considérant le pieu comme une succession infinie de masses et ressorts montés en série.



# ANNEXE

## GENERALITES SUR LES PERCUSSIONS IRRÉGULIERES

Les percussions irrégulières sont celles où les vitesses de percussions consécutives ne sont pas identiques entre elles (Fig. 1).

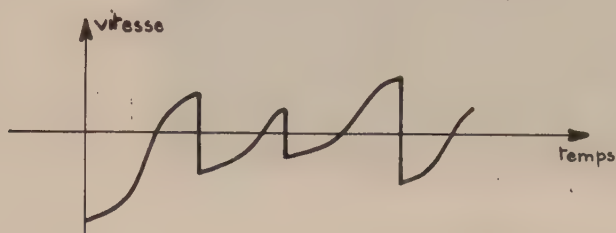


Fig 1

Elles peuvent être périodiques, de période  $\tau$ : il se produit alors  $n$  collisions par période ( $n$  entier supérieur à 1).

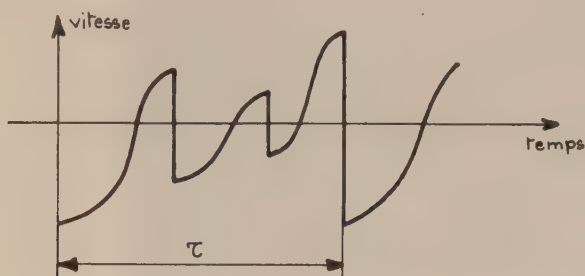


Fig 2

ex.:  $n = 2$

L'expression analytique des vitesses de percussions successives ne peut être formulée d'une façon générale.

Réglons, par exemple, la mise en équations du système à un degré de liberté, sur butée fixe, et soumis à une seule excitation sinusoïdale (Fig. 3).

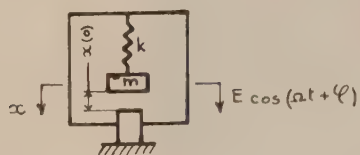


Fig 3

Les percussions successives se produiront aux temps :

$$t = \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n = \tau$$

Soient  $A_\ell, \psi_\ell$  les constantes d'intégration dans les domaines linéaires ( $\ell$  variant de 1 à  $n$ ).

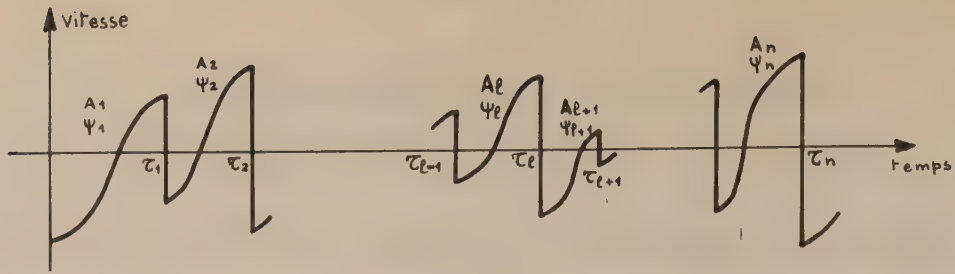


Fig 4

Ainsi :

$$x = A_\ell \cos(\omega_0 t + \psi_\ell) + \frac{d}{1-r^2} \cos(\Omega t + \phi) \quad \text{pour } \tau_{\ell-1} < t < \tau_\ell$$

et les conditions initiales

$$\begin{aligned} x(0) &= A_\ell \cos(\omega_0 \tau_\ell + \psi_\ell) + \frac{d}{1-r^2} \cos(-\Omega \tau_\ell + \phi) \\ &= A_{\ell+1} \cos(\omega_0 \tau_\ell + \psi_{\ell+1}) + \frac{d}{1-r^2} \cos(-\Omega \tau_\ell + \phi) \\ x'(\tau_\ell^+) &= -A_{\ell+1} \omega_0 \sin(\omega_0 \tau_\ell + \psi_{\ell+1}) - \frac{d\Omega}{1-r^2} \sin(-\Omega \tau_\ell + \phi) \\ x'(\tau_\ell^-) &= -A_\ell \omega_0 \sin(\omega_0 \tau_\ell + \psi_\ell) - \frac{d\Omega}{1-r^2} \sin(-\Omega \tau_\ell + \phi) \end{aligned}$$

quel que soit  $\ell$  variant de 1 à  $n$

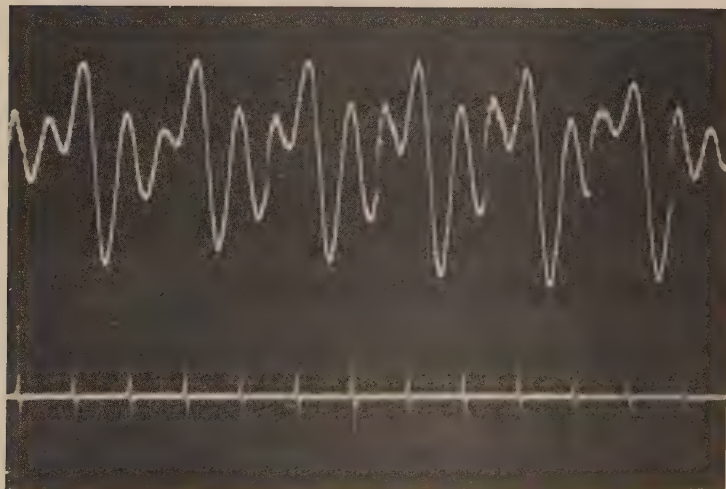
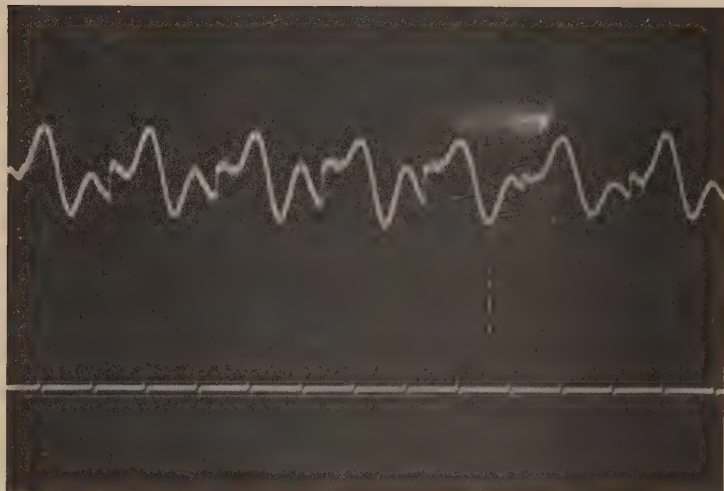
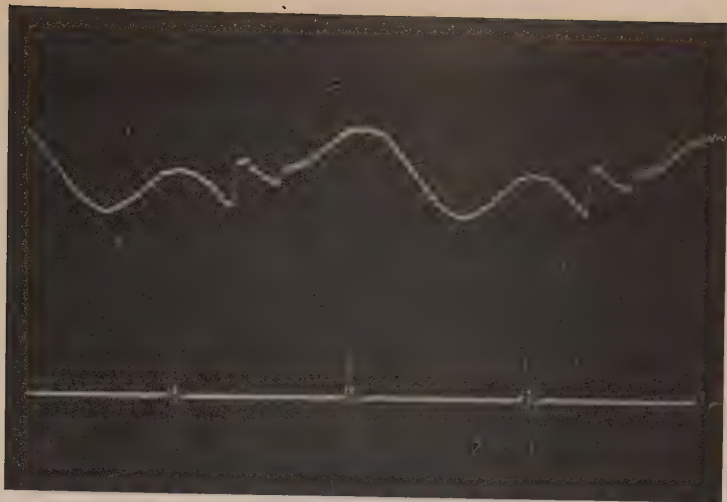
$$\text{De plus } x'(\tau_\ell^+) = -R x'(\tau_\ell^-)$$

La périodicité entraîne :

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= A_1 \\ \psi_{n+1} &= \psi_1 \\ \Omega \tau &= 2N\pi \end{aligned}$$

"Le nombre  $N$  de cycles décrits par l'excitation entre deux percussions identiques est un entier".

Nous illustrerons ces percussions irrégulières par quelques photographies expérimentales :





## BIBLIOGRAPHIE

---

Y. PIRONNEAU

*Mécanique des vibrations*  
E.N.S.M. NANTES.

Y. PIRONNEAU - J. VILAINÉ

*Etude des vibrations forcées d'un système  
à un degré de liberté avec déplacement limité  
d'un seul côté.*  
*Annales E.N.S.M.*

D.D. BARKAN

*Méthodes de vibration dans la construction*  
DUNOD Ed.

CH. HAYASHI

*Non-linear oscillations in physical systems*  
Mc Graw-Hill Electrical and Electronic  
Engineering Séries.

J.A. SPARENBERG

*Oscillator with an amplitude bounded at one side*  
*Laborium voor Toegepaste*  
*Mechanica der Technische Hogeschool*  
DELFT, NETHERLANDS.





